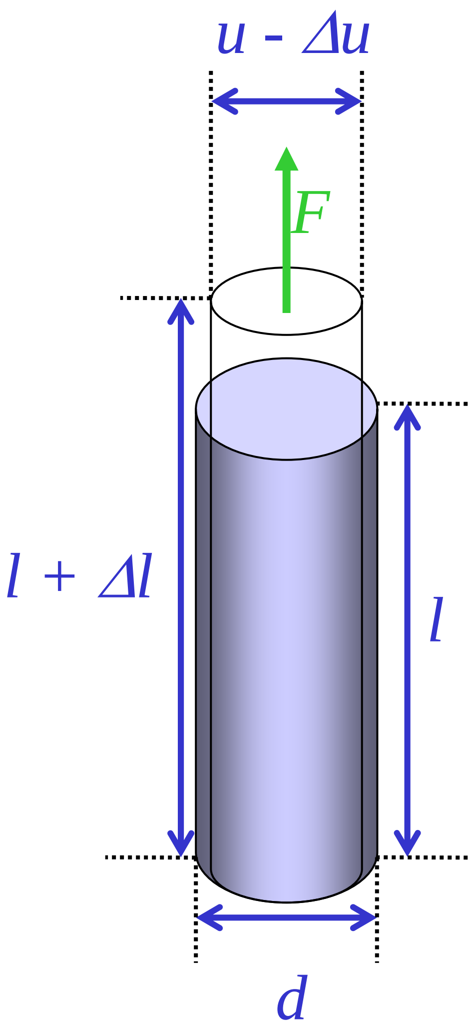
5.5 Exkurs: Mechanik deformierbare Medien

- Elastische Verformung: wenn durch äußere Kräfte hervorgerufene Verformungen Reaktionskräfte hervorruft, die Änderung rückgängig machen möchten. Die Verformung verschwindet nach Wegfall der äußeren Kräfte

Beispiele:

- Verformung eines elastischen Stabes
- Verformung im elastischen Kontinuum

5.5.1 Dehnung eines Stabes



- Experimentell: Relative Stabänderung bei Zugkraft ist proportional zur anliegenden Kraft F und entgegengesetzt proportional zur Querschnittfläche A: Hookesches Gesetz

$$\boxed{\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}} \qquad (5.5\text{-}1)$$

E: Elastiziätsmodul

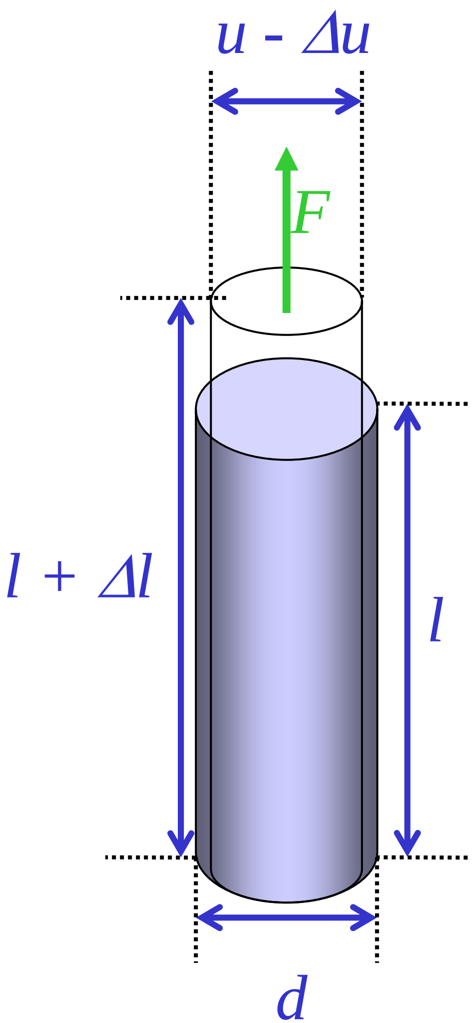
$[E] = 1\ \mathrm{N/m^2}$

- Experimentell: Stabdurchmesser ändert sich auch!

$$\boxed{\frac{-\Delta u}{u} = \mu \cdot \frac{\Delta l}{l}} \qquad (5.5\text{-}2)$$

μ: Poissonzahl

5.5.1 Dehnung eines Stabes



- Durch Dehnung des Stabes Volumen-änderung ΔV/V bei einachsiger Kraft

$$\Delta V = \pi \cdot \frac{(u+\Delta u)^2}{4} \cdot (l+\Delta l) - \pi \cdot \frac{u^2}{4} \cdot l$$

$$\approx \frac{\pi}{4} \cdot \left(u^2 \cdot \Delta l + 2 \cdot l \cdot u \cdot \Delta u\right)$$

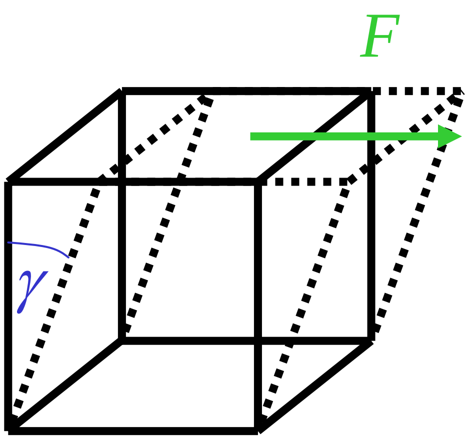
(Vernachlässigung kleiner Terme Δu ·Δu und Δl ·Δd)

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \left(u^2 \cdot \Delta l + 2 \cdot l \cdot u \cdot \Delta u\right)}{\frac{\pi}{4} \cdot u^2 \cdot l} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \cdot \frac{\Delta u}{u}$$

- Einsetzen von (5.5-1) und (5.5-2)

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\cdot\mu)}{E} \cdot \frac{F}{A}} \qquad (5.5\text{-}3)$$

5.5.2 Scherbeanspruchung



- Kräfte die tangential an Fläche angreifen bewirken Scherung. Hier gilt das Hookesche Gesetz für Scherbeanspruchung

$$\boxed{\frac{F}{A} = G \cdot \gamma} \qquad (5.5\text{-}4)$$

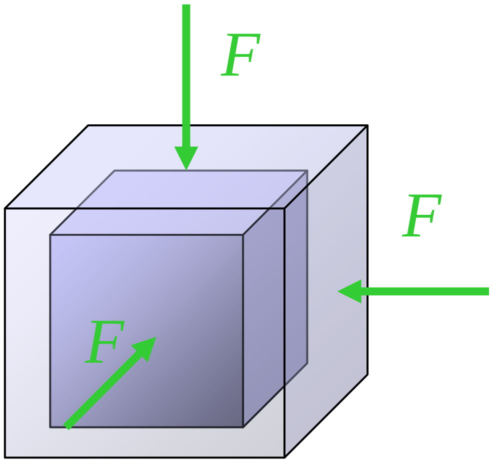
G:Gleitmodul [G] = 1 N/m^2

- Zusammenhang zwischen Gleitmodul, Elastizitätsmodul und Poissonzahl (für Herleitung siehe z.B. Stroppe Kap. 13.5 oder Meschede, Kap. 3.4.3)

$$\boxed{G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}} \qquad (5.5\text{-}5)$$

Bemerkung: E und G für einige Stoffe finden sich z.B. in Stuart & Klages Kap. 3.2.3, Tab. 3.2

5.5.3 Kompressibilität



- Experimentell: Druckänderung Δp bewirkt proportionale relative Volumenänderung $\Delta V/V$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{K} \cdot \Delta p} \qquad (5.5\text{-}6)$$

K:Kompressionsmodul $[K] = 1\ \mathrm{N/m^2}$

- Relation zu den anderen Modulen: Druckänderung bewirkt Kraft von allen Seiten. Daher Volumenänderung dreimal so groß wie für einachsige Krafteinwirkung (siehe (5.5-3)). Das bedeutet:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)}{E} \cdot \Delta p \quad \Longrightarrow \quad \boxed{K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\mu)}} \qquad (5.5\text{-}7)$$

5 Schwingungen und Wellen

- **Schwingung**:
- Regelmäßige Bewegung, die zwischen zwei Grenzen hin- & zurückführt
- Zeitlich periodische Zustandsänderung

$$\psi = \psi(t) \ [= \psi(t-\tau)]$$

- **Wellen**:
- Periodische Zustandsänderung einer physikalischen Größe, die sich in ähnlicher Weise ausbreitet wie eine Wasserwelle
- Zeitlich *und* räumlich periodische Zustandsänderung $\psi = \psi\ (\underline{x},t)$

5.6 Wellen

- Wo kommen Wellen vor?
  - Wasserwellen
  - Seismische Wellen
  - Schallwellen
  - Lichtwellen ⇦
  - Funkwellen ⇦
  - Materiewellen
  - ...

⇨ „Ohne Wellen würde uns Hören und Sehen vergehen!“

5.6 Wellen

- Charakteristika:

  Wellen ...

  ... transportieren Energie

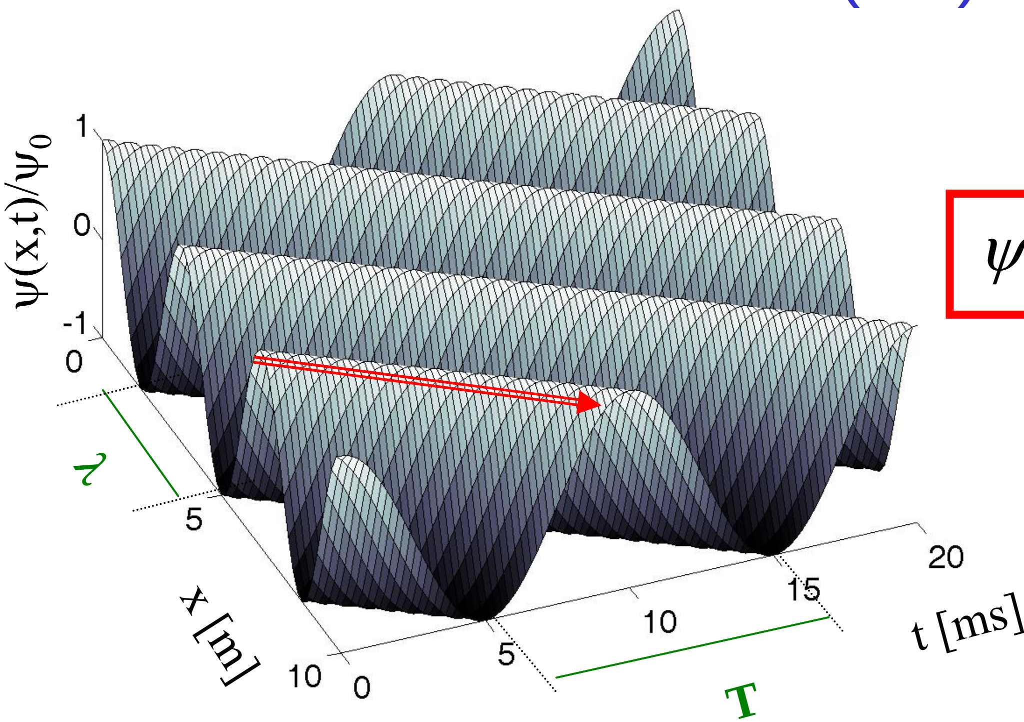
  ... können Information transportieren

  ... das Medium bewegt sich nur um einen mittleren Zustand

5.6 Wellen ... transportieren Energie

- Beispiel Erdbebenwellen: Können verheerende Wirkung haben so wie z.B. Kobe Januar 1995
- Erdbebenwellen habe eine Struktur. Es gibt im wesentlichen drei Typen von Wellen
  - Primärwellen (kommen zu erst)
  - Sekundärwellen (kommen danach)
  - Oberflächenwellen (kommen noch später; tragen den Großteil der Energie)

5.7 Fortschreitende Welle (1D): Wellenfunktion



$$\boxed{\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)}$$

(5.7-1)

φ : Startphase

ψ_0 : Amplitude

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$: Kreisfrequenz

$f = \dfrac{1}{T}$: Frequenz

T : Periode

$k = \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda}$: Wellenzahl

λ : Wellenlänge

Phasengeschwindigkeit: Geschwindigkeit mit der sich eine bestimmte Phase fortbewegt (z.B. Pfeil in Abbildung)

$$\boxed{c_{ph} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{\omega}{k}}$$

(5.7-2)

5.7 Fortschreitende Welle (1D): Wellentypen

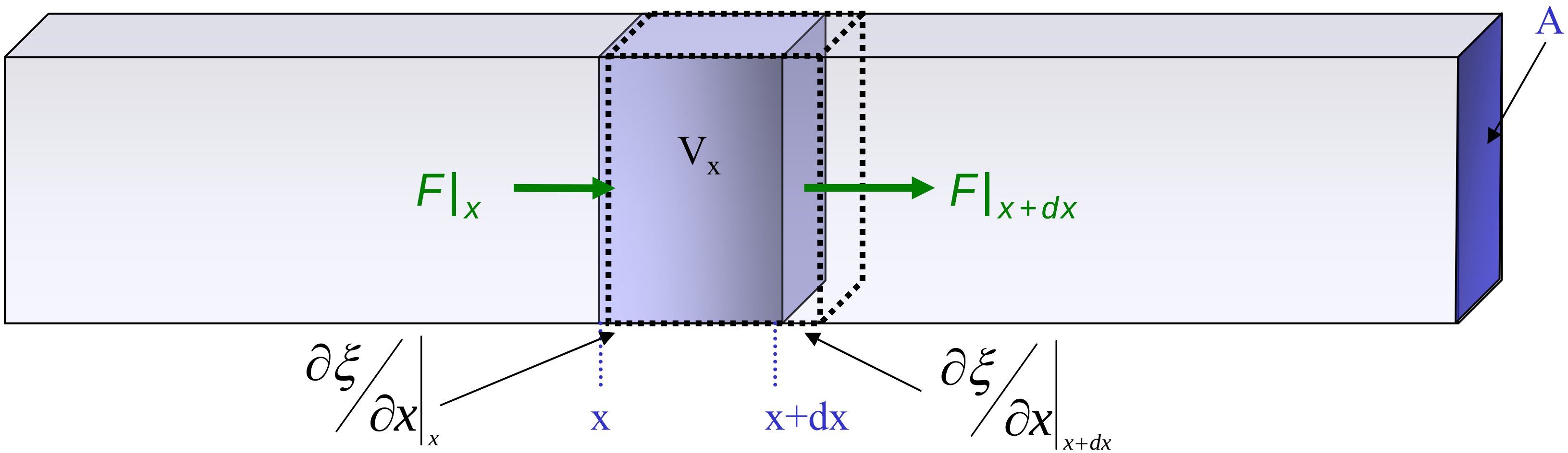
Longitudinalwelle

Bewegung in Richtung der Wellenausbreitung

Transversalwelle

Bewegung senkrecht zur Wellenausbreitung

5.7 Fortschreitende Welle (1D): Longitudinalwelle im Stab



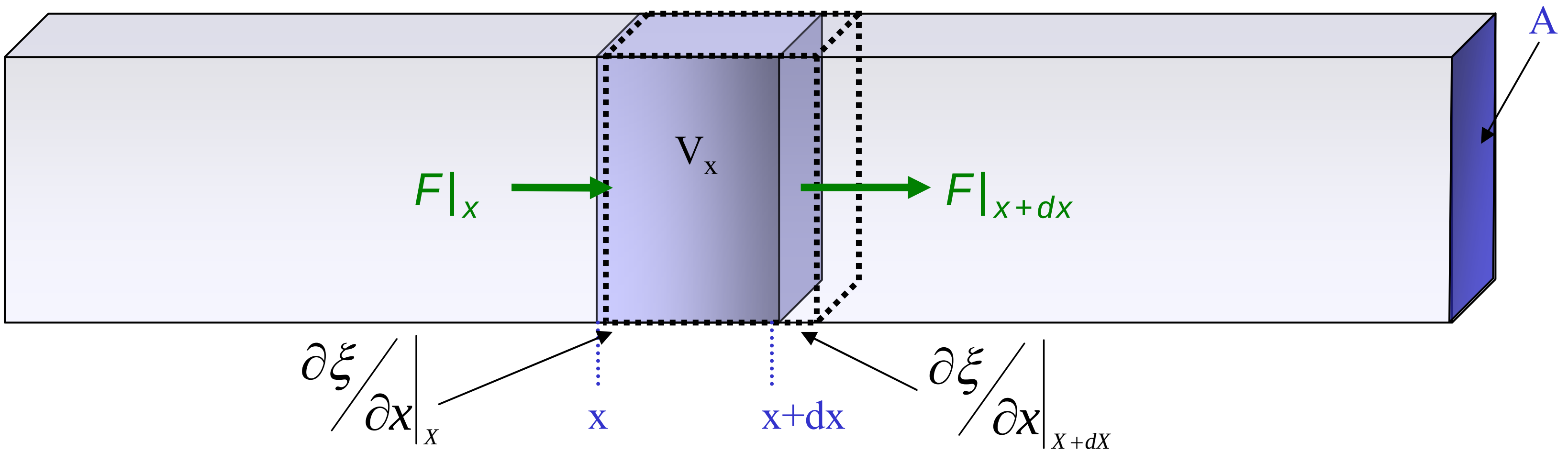
- Kraft F, die auf das Volumenelement V_x = Adx wirkt

$$\boxed{F = F\,|_{x+dx} - F\,|_x} \qquad (5.7\text{-}3)$$

- Kopplung von Auslenkung ξ mit dem der Kraft F über das Elastizitätsmodul E (Hookesches Gesetz):

$$\frac{F}{A} \overset{(5.5-1)}{=} E \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \boxed{F = E \cdot A \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\bigg|_{x+dx} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\bigg|_x \right) = E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx} \qquad (5.7\text{-}4)$$

5.7 Fortschreitende Welle (1D): Longitudinalwelle im Stab



- Bewegungsgleichung (lex secunda) mit $F = E\cdot A\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$ (5.7-4)

$$\underbrace{A\cdot dx\cdot\rho}_{\text{Masse}}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = E\cdot A\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$$

Dichte ρ.
Querschnittfläche A

- Eindimensionale Wellengleichung (für den Stab mit 5.7-6)

$$\boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0} \quad (5.7\text{-}5) \qquad \boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (5.7\text{-}6)$$

5.7 Fortschreitende Welle (1D): Lösung der 1D Wellengleichung

- Eindimensionale Wellengleichung $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.7\text{-}5)$$

- Ebene fortschreitende Welle (5.7-1) ist Lösung von (5.7-5)!

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) \quad (5.7\text{-}1)$$

Vergleiche (5.1-5)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (-1) \cdot \xi_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) = (-1) \cdot \xi_0 \cdot \omega^2 \cdot \xi$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = (-1) \cdot \xi_0 \cdot k^2 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) = (-1) \cdot \xi_0 \cdot k^2 \cdot \xi$$

- Einsetzen in (5.7-5)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \cdot \xi = 0 \quad \text{sofern} \quad \frac{\omega}{k} = c \quad (5.7\text{-}2)$$

➢ c ist Geschwindigkeit!

5.7 Fortschreitende Welle (1D): Longitudinalwelle im Stab

- Jede Linearkombination erfüllt auch die Bedingung (5.7-5)

➢ Superpositionsprinzip

$$\boxed{\xi(x,t) = \sum_j \xi_{0j} \cos(\omega_j \cdot t - k_j \cdot x + \varphi_j)} \qquad (5.7\text{-}7)$$

sofern $\frac{\omega_j}{k_j} = c$ für alle *j*

- Allgemein: Jede Funktion der Form

$$\xi(x,t) = \xi(t \pm \frac{x}{c})$$

genügt der eindimensionalen Wellengleichung

5.7 Fortschreitende Welle (1D): Geschwindigkeiten

- Longitudinalwellen (Längswellen)

  Ausbreitung || Auslenkung

- Transversalwellen (Scherwellen)

  Ausbreitung $\perp$ Auslenkung

- Stab

(5.7-6)
$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

(5.5-1)
$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

(5.5-4)
$$\frac{F}{A} = G \cdot \gamma$$

E: Elastizitätsmodul

G: Gleitmodul

- Im elastischen Kontinuum

$$c = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}}$$

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

K: Kompressionsmodul

- In Flüssigkeiten und Gasen

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

–

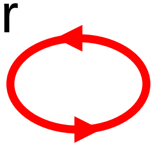
Wellentypen beim Erdbeben

– Primärwellen (P) = Longitudinalwellen

– Sekundärwellen (S) = Transversalwellen

– Oberflächenwellen = Grenzflächenwellen

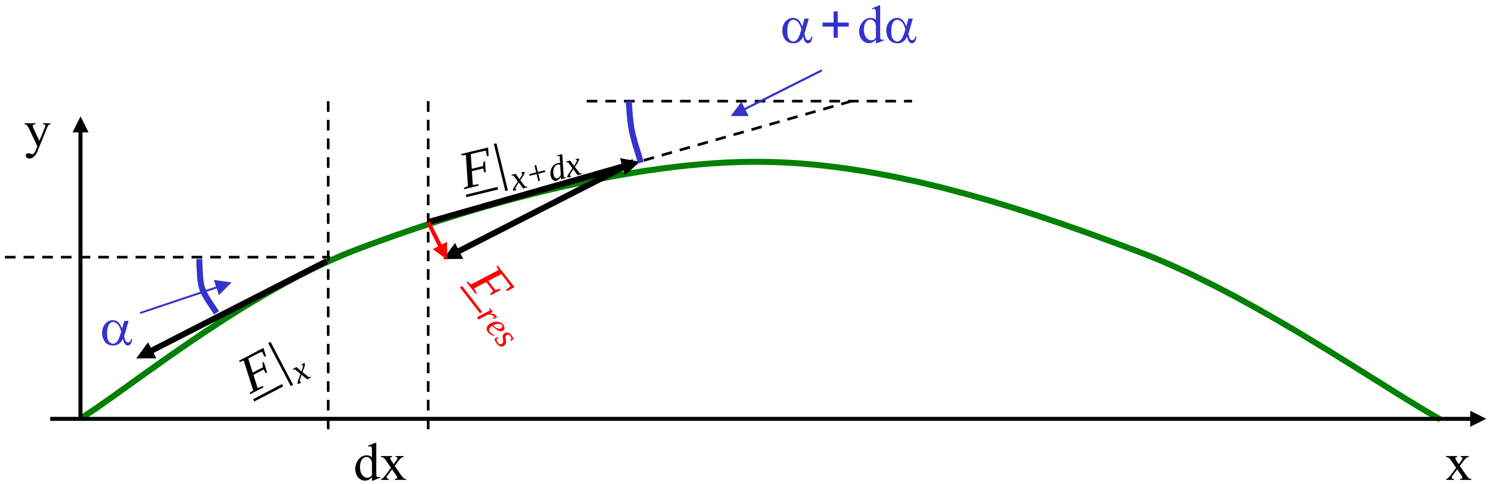
- Rayleigh-Wellen: Kombination aus longitudinaler und transversaler Bewegung



- Love Wellen: Transversalwellen, treten auf, wenn

$$c_{trans}(Oberfläche) < c_{trans}(Innern)$$

5.8 Stehende Welle:



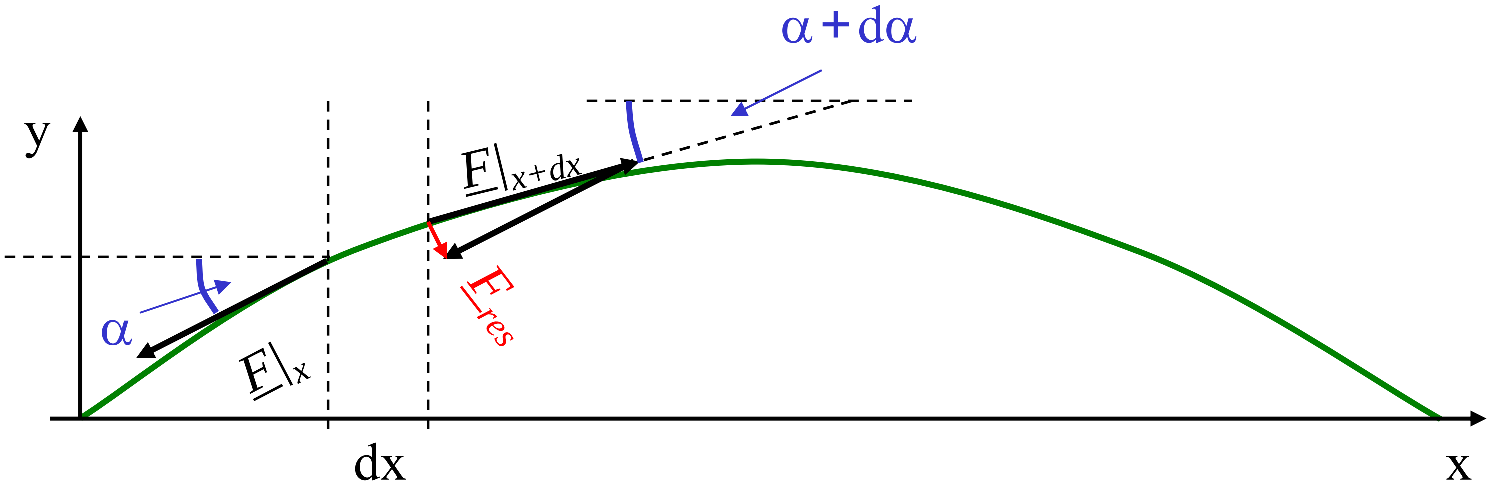
- am Beispiel der schwingenden Saite: Die Kräfte F an einem kleinen Saitenstück sind vom Betrag gleich (F_0) aber nicht genau entgegengesetzt (siehe Abb.). Die Krümmung der Saite erzeugt Kraftkomponente $\underline{F}_{res}$ senkrecht zum Saitenstück.

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}\,\Big|_{x+dx} - \vec{F}\,\Big|_{x}$$

Wesentliche Komponente in y-Richtung.

$$\boxed{F_{res} \approx \vec{F}_{res\,y} = F_0 \cdot \sin(\alpha + d\alpha) - F_0 \cdot \sin(\alpha)} \quad (5.8\text{-}1)$$

5.8 Stehende Welle:



$$F_{res} = F_0 \cdot \sin(\alpha + d\alpha) - F_0 \cdot \sin(\alpha) \qquad (5.8\text{-}1)$$

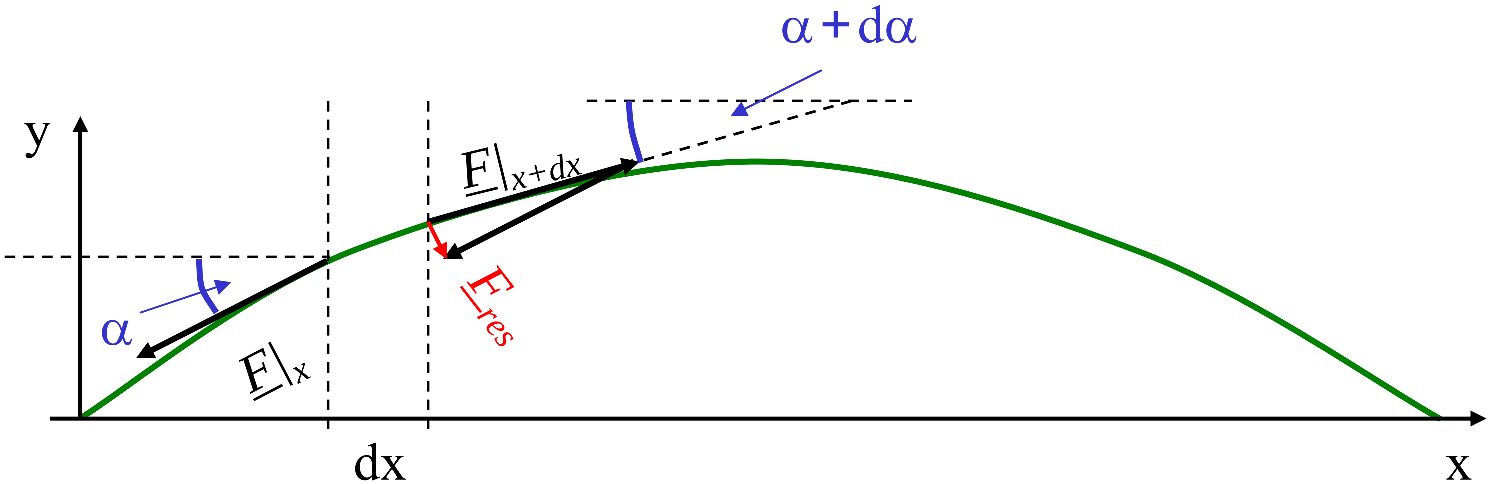
Näherung für kleine Auslenkung

$$\sin(\alpha) \approx \alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad d\alpha = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

Resultierende Kraft

$$\boxed{F_{res} = F_0 \cdot d\alpha = F_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx} \qquad (5.8\text{-}1a)$$

5.8 Stehende Welle:



Bewegungsgleichung mit $$F_{res} = F_0 \cdot d\alpha = F_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad \text{(5.8-1a)}$$

$$\underbrace{A \cdot dx \cdot \rho}_{\text{Masse}} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx$$

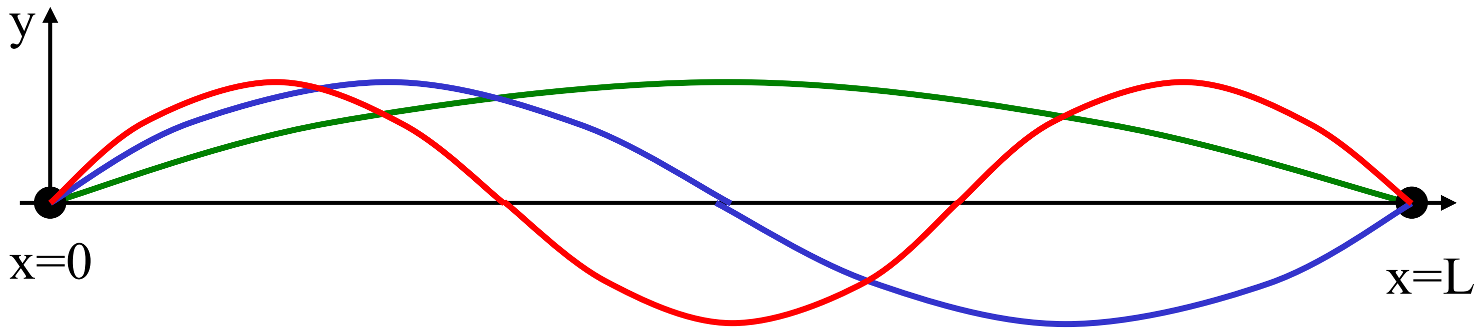
Dichte ρ.
Querschnittfläche A

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(5.7-5)}$$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{F_0}{\rho \cdot A}}} \quad \text{(5.8-2)}$$

Schwingende Seite führt auch zur 1D Wellengleichung!

5.8 Stehende Welle:



I. Randbedingung: *y(0,t)* = *0* für alle *t*. Lösung:

$$\boxed{y(0,t) = y_0 \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + y_0 \sin(\omega \cdot t + k \cdot x)} \qquad (5.8\text{-}3)$$

➢ Stehende Welle

II. Randbedingung: *y(L,t)* = *0* für alle *t*. L: Saitelänge

$$\boxed{k \cdot L = \pi \cdot n \Rightarrow k = \frac{\pi \cdot n}{L} \text{ mit } n \in \mathrm{N}} \qquad (5.8\text{-}4)$$

$$\boxed{\omega = k \cdot c = \frac{\pi \cdot n}{L} \sqrt{\frac{F_0}{\rho \cdot A}}} \qquad (5.8\text{-}5)$$