5 Schwingungen und Wellen

- **Schwingung**:
- Regelmäßige Bewegung, die zwischen zwei Grenzen hin- & zurückführt
- Zeitlich periodische Zustandsänderung mit

  Periode T $\psi = \psi(t)$ [$= \psi(t-T)$]

- **Wellen**:
- Periodische Zustandsänderung einer physikalischen Größe, die sich in ähnlicher Weise ausbreitet wie eine Wasserwelle
- Zeitlich *und* räumlich periodische Zustandsänderung $\psi = \psi\,(\underline{x},t)$

5 Schwingungen und Wellen

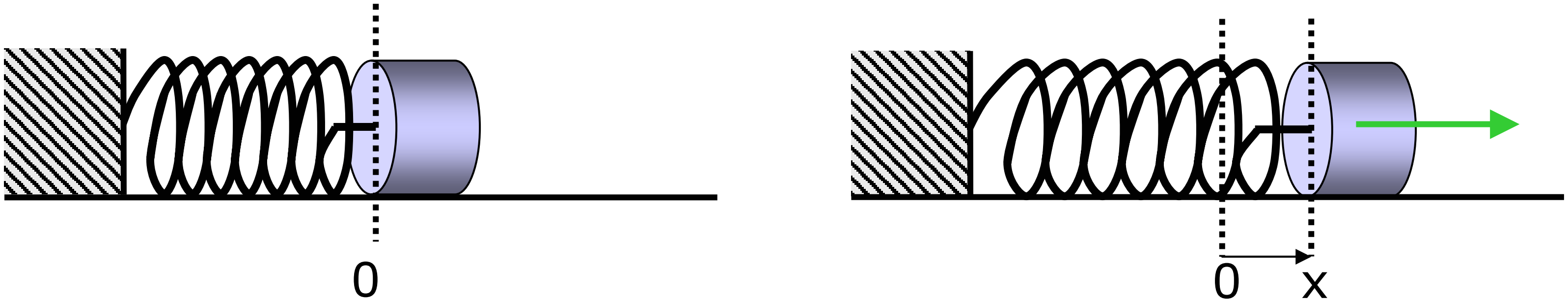
<u>Beispiel für alltägliche Schwingungen</u>

- Gitarrenseiten
- Schwingung der Membran eines Lautsprecher
- Schwingungen von Quarzkristallen in der Armbanduhr
- Schwingungen von Molekülen in Festkörpern, die uns die Empfindung von Wärme vermitteln.
- Elektromagnetische Schwingungen (Radio, Fernsehen, Telephon)

5.1 Harmonischer Oszillator

kräftefrei

Bei Anliegen der Kraft *F*



Beispiel Masse-Feder System

Zunächst stationäre Betrachtung:

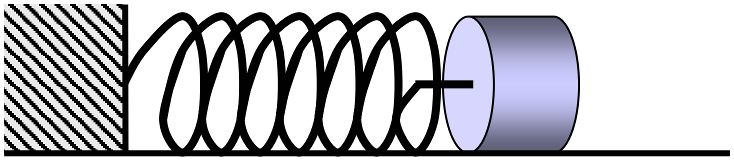
Wirkt eine Kraft *F* auf eine Feder so ist ihre Elongation *x* zu dieser Kraft proportional.

Der Proportionalitätsfaktor heißt Federkonstante *D*.

$$\boxed{\vec{F} = -D \cdot \vec{x}} \qquad (5.1\text{-}1)$$

[D] = 1 N/m

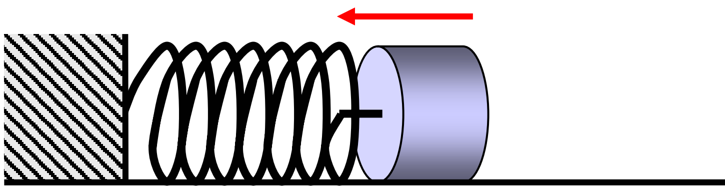
5.1 Harmonischer Oszillator



$t=0 \qquad + \quad n\cdot T$

In momentaner Ruhe

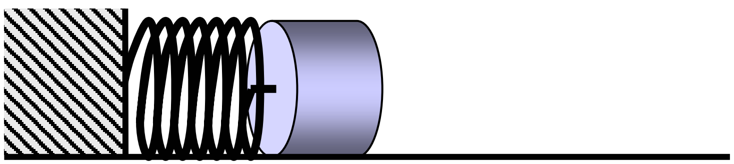
Krafteinwirkung in Wandrichtung Wand



$t= 0.25\cdot T \quad + \quad n\cdot T$

Max. Geschwindigkeit $\underline{v}$ in Wandrichtung

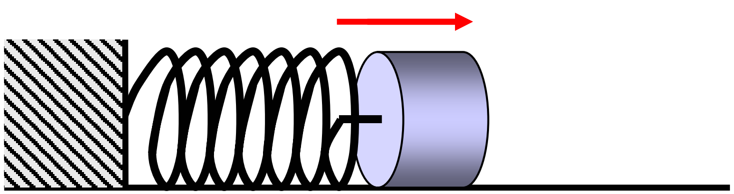
Keine momentane Krafteinwirkung



$t= 0.5\ T \quad + \quad n\cdot T$

In momentaner Ruhe

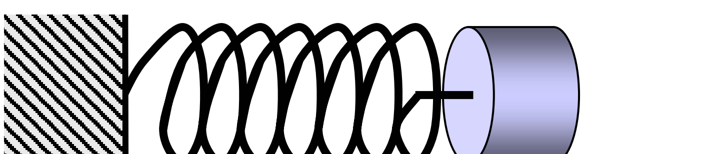
Krafteinwirkung von der Wand weg



$t = 0.75\ T + \quad n\cdot T$

Max. Geschwindigkeit $\underline{v}$ von der Wand weg

Keine momentane Krafteinwirkung



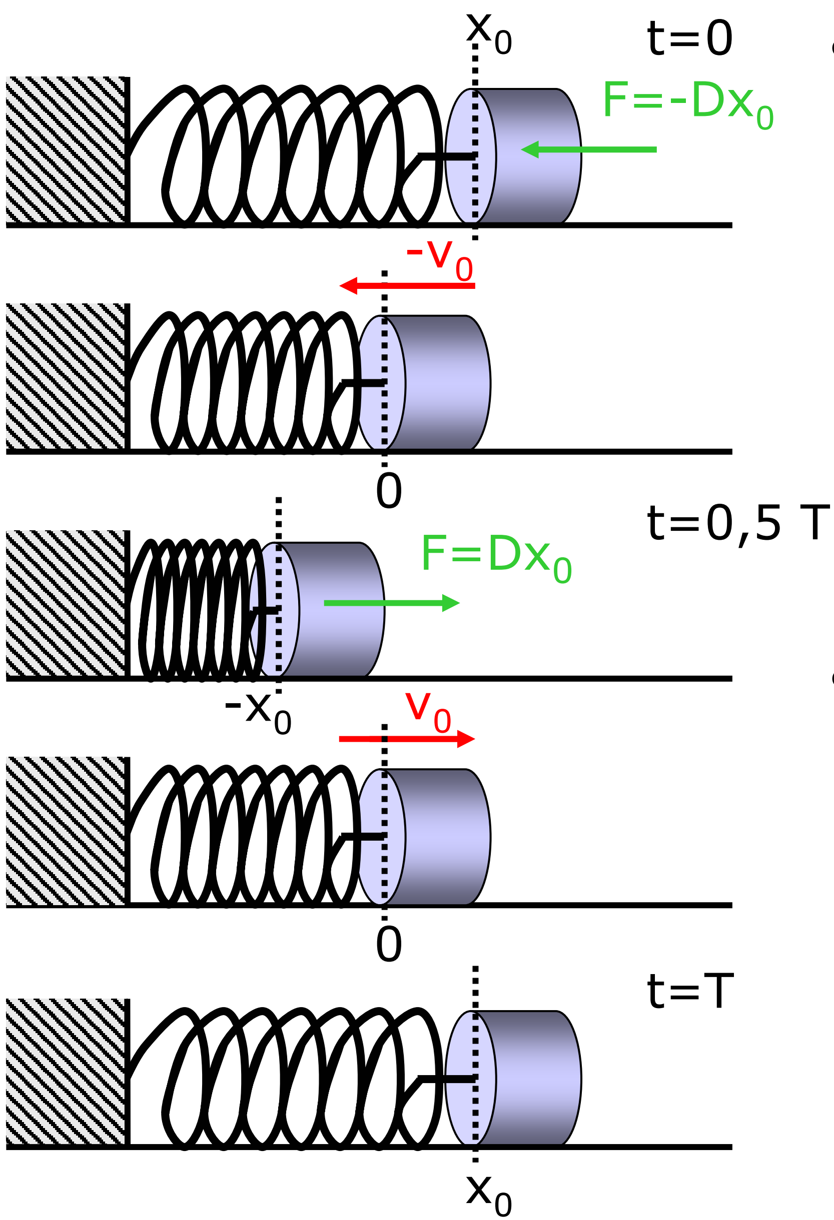
$t = T \qquad + \quad n\cdot T$

In momentaner Ruhe

Krafteinwirkung in Wandrichtung

(unter Vernachlässigung von Reibung)

5.1 Harmonischer Oszillator



- Nach Lex secunda (1.2-3)

$$\vec{F} = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Mit (5.1-1) skalar $-D \cdot x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x = 0} \quad (5.1\text{-}2)$$

Bewegungsgleichung der ungedämpften Schwingung

- Lösung:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)} \quad (5.1\text{-}3)$$

x_0 : Maximalauslenkung

φ_0 : Anfangsphase (im Bsp. rechts $\varphi_0 = 0$)

$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T}$: Kreisfrequenz

$f_0 = \frac{1}{T}$: Frequenz ; T : Periode

J.L. Verhey, (CvO Universität Oldenburg)

5.1 Harmonischer Oszillator

- Berechne Beschleunigung mit *x(t)* aus (5.1-3)

$$x(t) \overset{(5.1-3)}{=} x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = (-1) \cdot \omega_0 \cdot x_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)} \qquad (5.1\text{-}4)$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = (-1) \cdot \omega_0^{\,2} \cdot x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \overset{(5.1-3)}{=} (-1) \cdot \omega_0^{\,2} \cdot x} \qquad (5.1\text{-}5)$$

- Einsetzen in Bewegungsgleichung $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + Dx = 0$ (5.1-2)

$$\boxed{-m \cdot \omega_0^{\,2} \cdot x + D \cdot x = 0} \qquad (5.1\text{-}6)$$

➢ Kreisfrequenz und Periode der harmonischen Schwingung

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}} \qquad (5.1\text{-}7) \qquad \boxed{T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m}{D}}} \qquad (5.1\text{-}8)$$

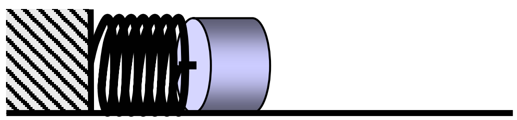
- Maximalgeschwindigkeit v_0 aus (5.1-4):

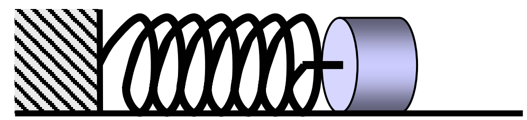
$$\boxed{v_0 = \omega_0 \cdot x_0} \qquad (5.1\text{-}9)$$

5.2 Energiebilanz des harmonischen Oszillator

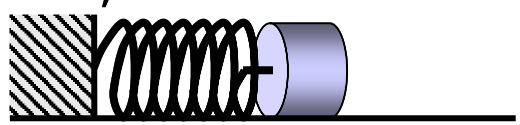
- <u>Qualitativ</u>: Periodisch reversible Umwandlung von potentieller Energie und kinetischer Energie

  Im Beispiel für t=0 & t=0,5·T *nur* potentielle Energie entsprechend E=-∫Fdx (1.2-14)





  Für t=0,25·T & t=0,75·T *nur* kinetische Energie



- <u>Quantitativ</u>: Mulitipliziere (5.1-2) mit *dx/dt*

$$\left(m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+Dx\right)\cdot\frac{dx}{dt}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{D}{2}\cdot x^2\right)=0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{D}{2}\cdot x^2=E_{ges}=const.} \qquad (5.2\text{-}1)$$

$$E_{kin}=\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (1.2\text{-}18)$$

$$\boxed{E_{pot}=\frac{D}{2}\cdot x^2} \qquad (5.2\text{-}2)$$

5.2 Energiebilanz des harmonischen Oszillator

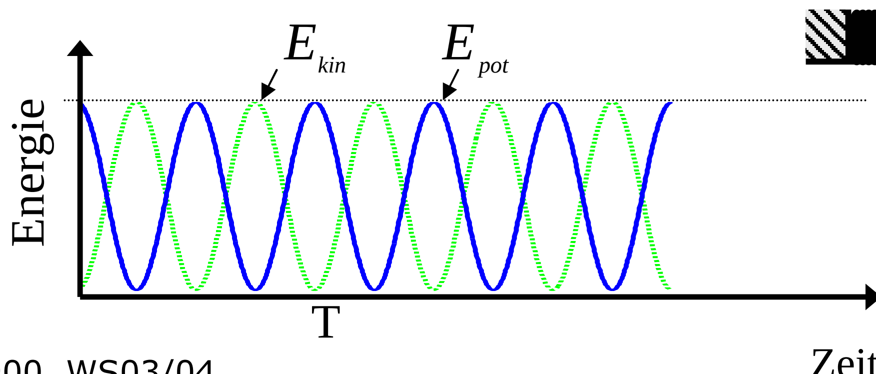
- In jeder Schwingungsphase ist Summe aus potentieller und kinetischer Energie konstant (Energieerhaltung)

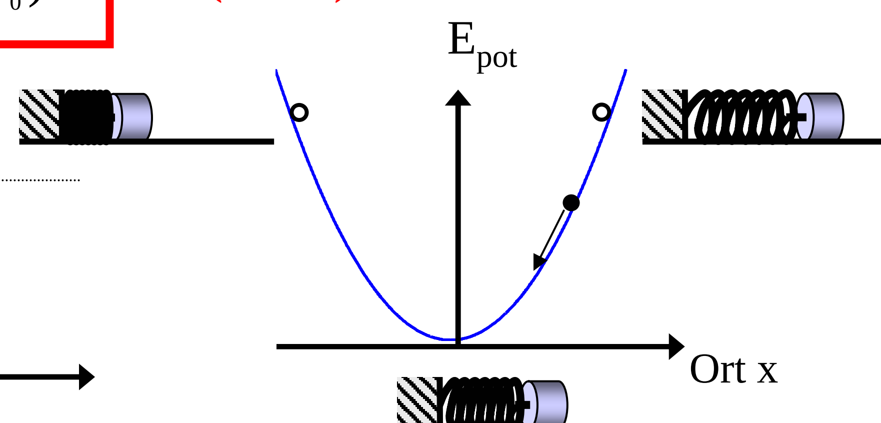
  ⇨ konservatives System (siehe 1.2.5)

- Setze (5.1-4) in (1.2-18) für kinetische Energie und (5.1-3) in (5.2-2) für potentielle Energie

$$\boxed{E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot \omega_0^{\,2} \cdot x_0^{\,2} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)} \qquad (5.2\text{-}3)$$

$$\boxed{E_{pot} = \frac{D}{2} \cdot x_0^{\,2} \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0)} \qquad (5.2\text{-}4)$$





5.2 Energiebilanz des harmonischen Oszillator

- Beachte: Jedes System, dass sich um eine Ruhelage bewegt kann bei kleinen Auslenkungsamplituden und Vernachlässigung von Energiedissipation als harmonischer Oszillator betrachtet werden.

  notwendig: E_{pot} = const. · (Auslenkung)^2

  $\Leftrightarrow$ F = const. · Auslenkung

- Für kleine Auslenkungen gilt dieses bei:
  - Längenänderung eines Stabes (Hookesches Gesetz)
  - Volumenänderung durch Druckänderung
  - Scherung eines Festkörpers
  - Torsion eines Fadens

5.3 Freie gedämpfte Schwingungen

- Da schwingungsfähiges System nicht vollständig abgeschlossen ist wird dem System durch Kopplung mit dem angrenzenden Medium Schwingungsenergie entzogen.
- Geschieht durch Abstrahlung (z.B. Schall) und durch Reibung (siehe 1.2.6)
- Reibung ist Bewegungsrichtung entgegengesetzt

$$\boxed{\vec{F} = -F(v) \cdot \vec{e}_v} \qquad (5.3\text{-}1)$$

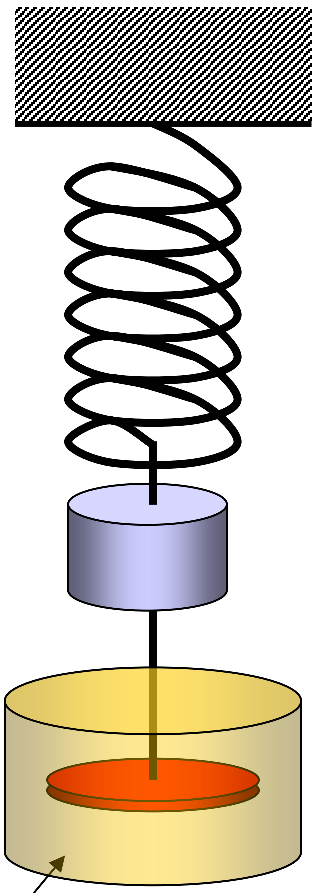
- Im Beispiel zu 5.1: Annahme von Stokesscher Reibung.

$$\boxed{\vec{F} = -\beta \cdot v \cdot \vec{e}_v \qquad \beta = const.} \qquad (5.3\text{-}2)$$

➢ Differentialgleichung der gedämpften Schwingung

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x + \beta \cdot \frac{dx}{dt} = 0} \qquad (5.3\text{-}3)$$

5.3 Freie gedämpfte Schwingungen



$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x + \beta \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad (5.3\text{-}3)$$

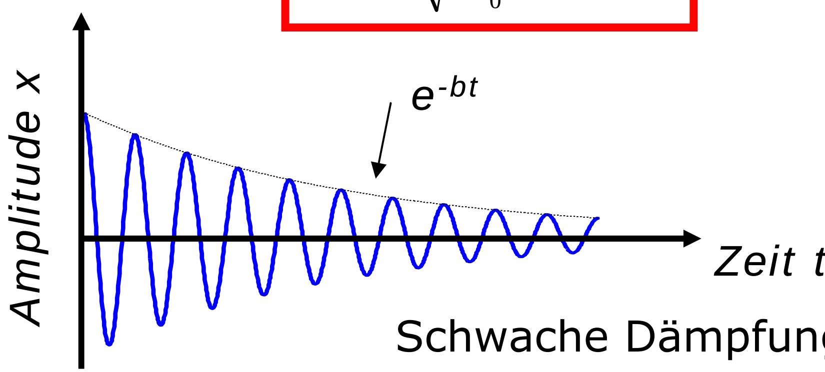
- Allgemeine Lösung der Differentialgleichung

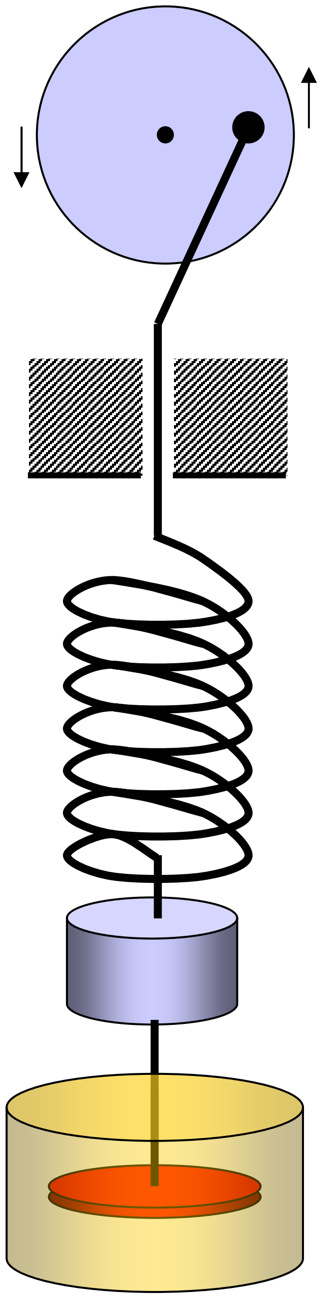
$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{-bt} \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)} \quad (5.3\text{-}4)$$

- *b* ist Dämpfungskonstante $\boxed{b = \frac{\beta}{2 \cdot m}}$ (5.3-5)

- Kreisfrequenz ω der gedämpften Schwingung

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - b^2}} \quad (5.3\text{-}6)$$

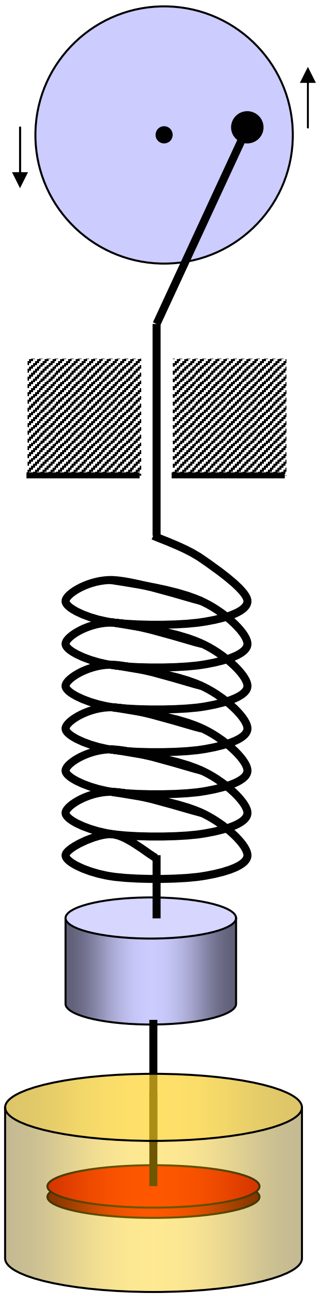




5.4 Erzwungene Schwingung und Resonanz

- Definition „erzwungene Schwingung“: Ein System, dass von außen kontinuierlich angeregt wird
- Experimentelles Ergebnis: Nach (komplexen) Einschwingvorgang ist System in eingeschwungenden Zustand, bei der x(t) mit gleicher Frequenz wie die Anregung $x_e(t)$ und einer Phasenverschiebung schwingt.

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x + \beta \cdot \frac{dx}{dt} = F_{erreg}(t)} \qquad (5.3\text{-}3)$$



5.4 Erzwungene Schwingung und Resonanz

- Berechenbar Beispiel (siehe Abbildung): Erregerausschlag ist:

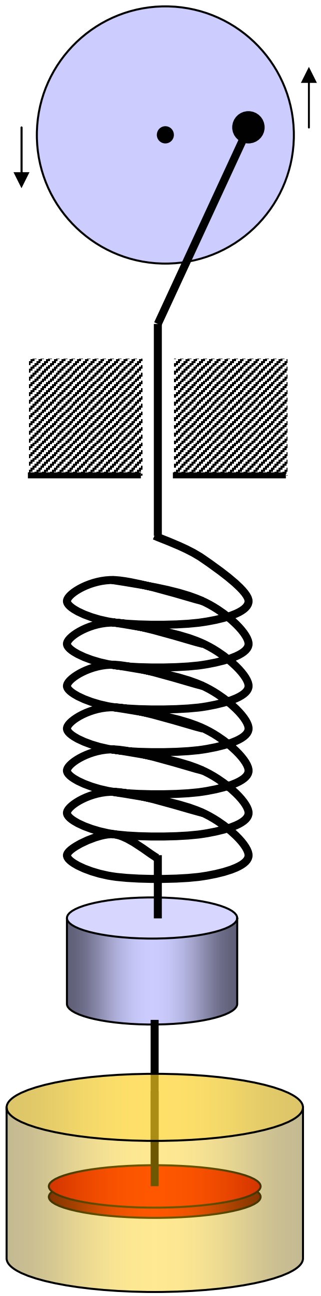
$$\boxed{x_e(t) = r_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)} \quad (5.4\text{-}1)$$

- Dadurch Feder zusätzlich um x_e gestaucht oder gedehnt. Das bedeutet für die rücktreibende Kraft der Feder

$$F_{feder}(t) = -D \cdot (x - x_e)$$

- d.h. $F(t) = D \cdot x_e$

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x + \beta \cdot \frac{dx}{dt} = D \cdot x_e} \quad (5.4\text{-}2)$$



5.4 Erzwungene Schwingung und Resonanz

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot b \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = \omega^2 \cdot r_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)} \qquad (5.4\text{-}3)$$

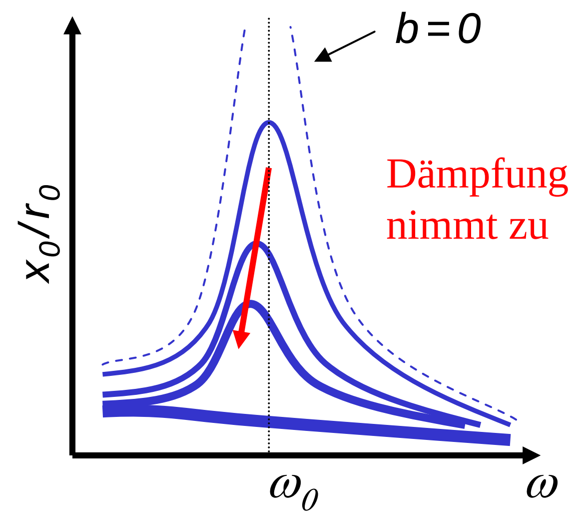
- Mit periodischem Lösungsansatz

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)} \qquad (5.4\text{-}4)$$

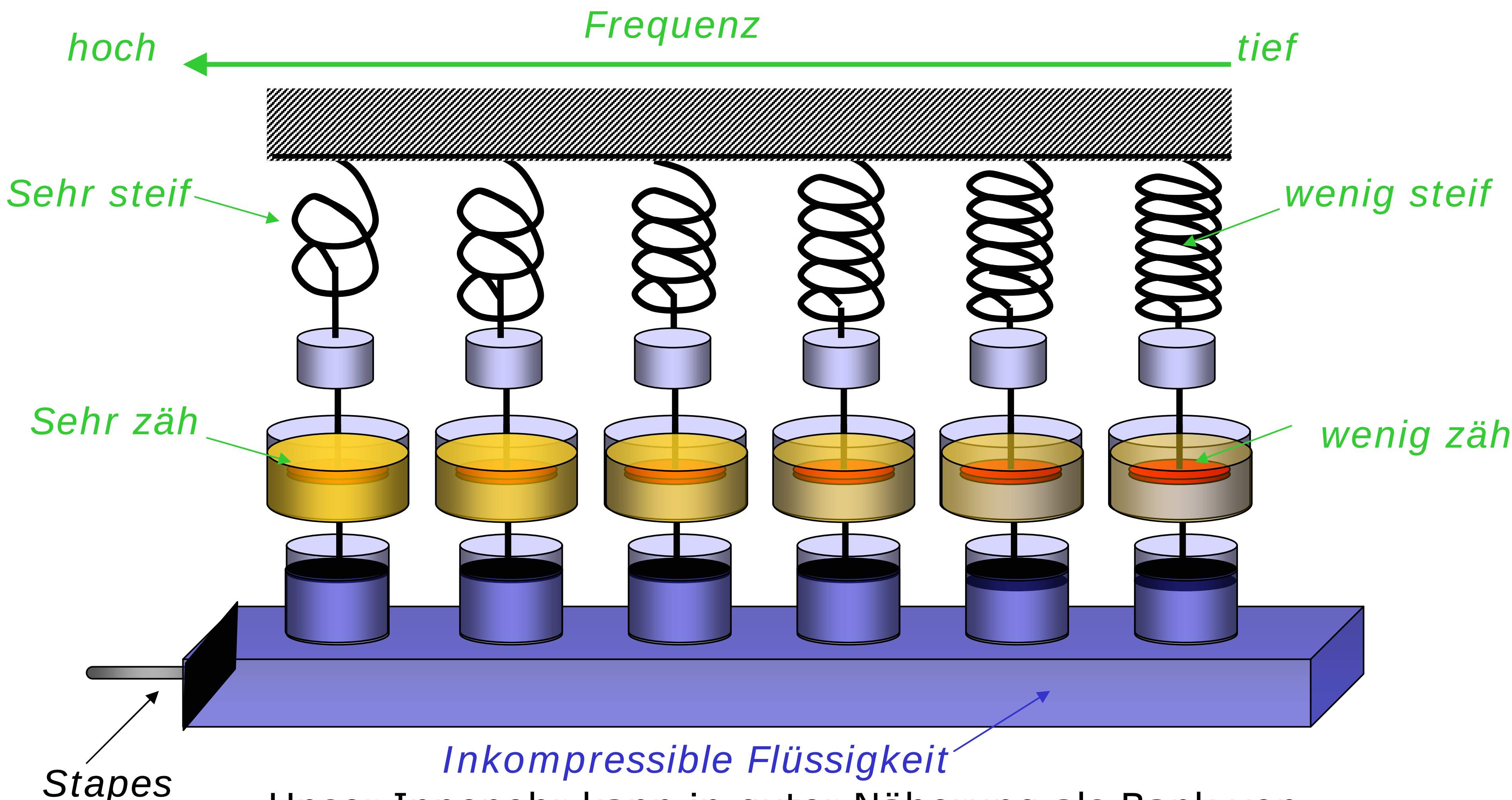
aus Gl. (5.4-3) Phasenverschiebung und Verhältnis von Erregeramplitude und Auslenkung berechenbar

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{2 \cdot b \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}} \qquad (5.4\text{-}5)$$

$$\boxed{\frac{x_0}{r_0} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\varphi)} \qquad (5.4\text{-}6)$$



Anwendung: Schallverarbeitung im Innenohr



- Unser Innenohr kann in guter Näherung als Bank von Resonatoren mit unterschiedlicher Resonanzfrequenz betrachtet werden. Der Schall ist hierbei der Erreger über eine inkompressible Flüssigkeit