3.5 Potential an der Zellmembran eines Neurons

- Goldmann Gleichung für mehrere Ionen

allgemein

$$\boxed{E = \frac{R \cdot T}{F} \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} z_k P_k [X_k]_{außen} + \sum_{l=1}^{m} z_l P_l [Y_l]_{innen}}{\sum_{k=1}^{n} z_k P_k [X_k]_{innen} + \sum_{l=1}^{m} z_l P_l [Y_l]_{außen}} \right)} \qquad (3.5\text{-}4)$$

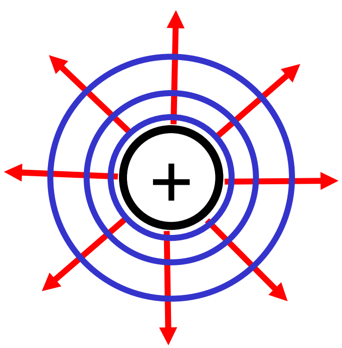
Mit für Membranpotential wichtige Ionen K^+, Na^+, CL^- ($P_K:P_{Na}:P_{CL}=1:0{,}04:0{,}45$)

$$E = \frac{R \cdot T}{F} \cdot \ln \frac{P_K [K^+]_{außen} + P_{Na} [Na^+]_{aussen} + P_{CL} [CL^-]_{aussen}}{P_K [K^+]_{innen} + P_{Na} [Na^+]_{innen} + P_{CL} [CL^-]_{innen}}$$

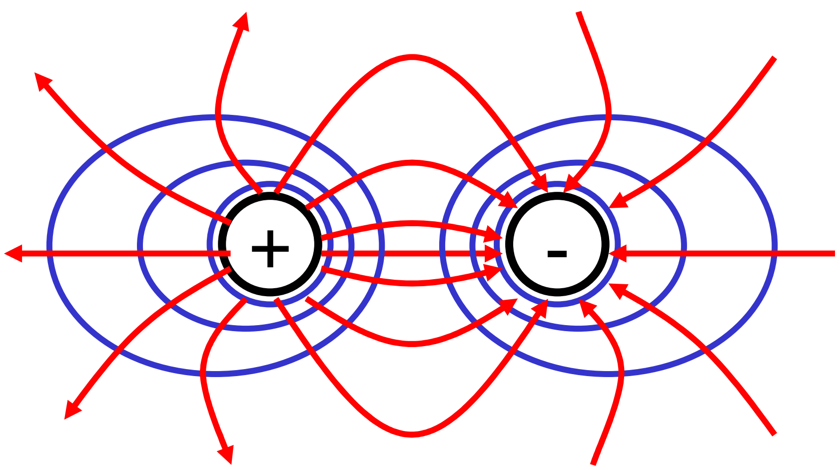
Siehe z.B. Heinrich Reichert „Neurobiologie“ Thieme Verlag

3.6 Elektrischer Dipol

Elektrische Feldstärke $\underline{E}$ sowie das Potential φ eines Monopols und eines Dipols.



Elektrischer Monopol



Elektrischer Dipol

3.6 Elektrischer Dipol

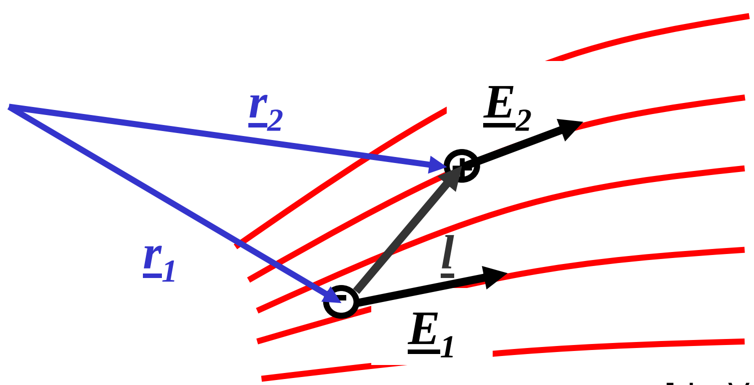
- Zwei ungleichartige Ladungen q im Abstand l. Seien $\underline{r}_1$ und $\underline{r}_2$ die Vektoren zu der negativen bzw. positiven Ladungen sowie $\underline{E}_1$ und $\underline{E}_2$ die elektrische Feldstärke an diesen Positionen.

➢ An den Dipol wirkt folgende resultierende Kraft

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \overset{(3.3-1)}{=} -q \cdot \vec{E}_1 + q \cdot \vec{E}_2 = q \cdot \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)} \qquad (3.6.1)$$

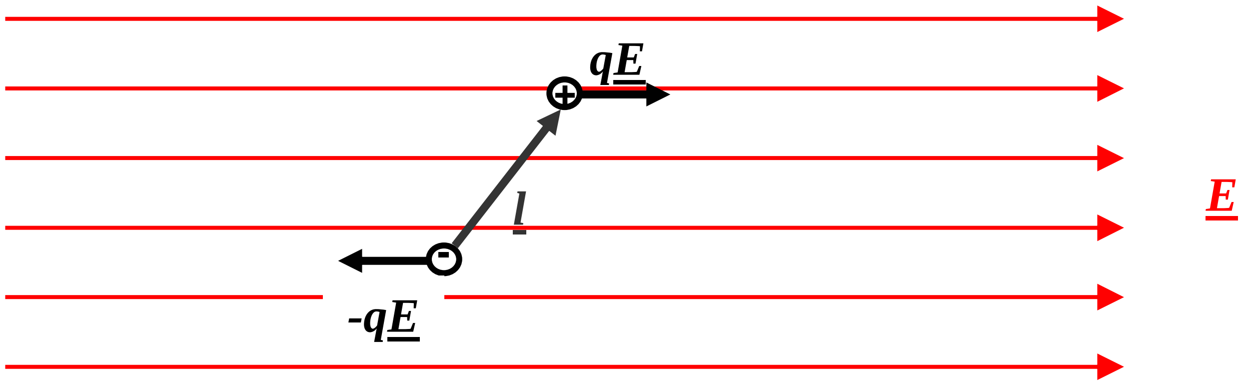
➢ An den Dipol wirkt außerdem ein Drehmoment

$$\boxed{\vec{M} \overset{(1.3-11)}{=} \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \overset{(3.3-1)}{=} \vec{r}_1 \times (-q \cdot \vec{E}_1) + \vec{r}_2 \times (q \cdot \vec{E}_2)} \qquad (3.6.2)$$



3.6 Elektrischer Dipol

a) im homogenen Feld $\underline{E}$



- Im homogenen Feld ist die resultierende Kraft $\underline{F}=0$, da $(\underline{E}_2 - \underline{E}_1) = (\underline{E} - \underline{E}) = 0$ (siehe 3.6.1)
- Das Drehmoment $\underline{M}$ ist

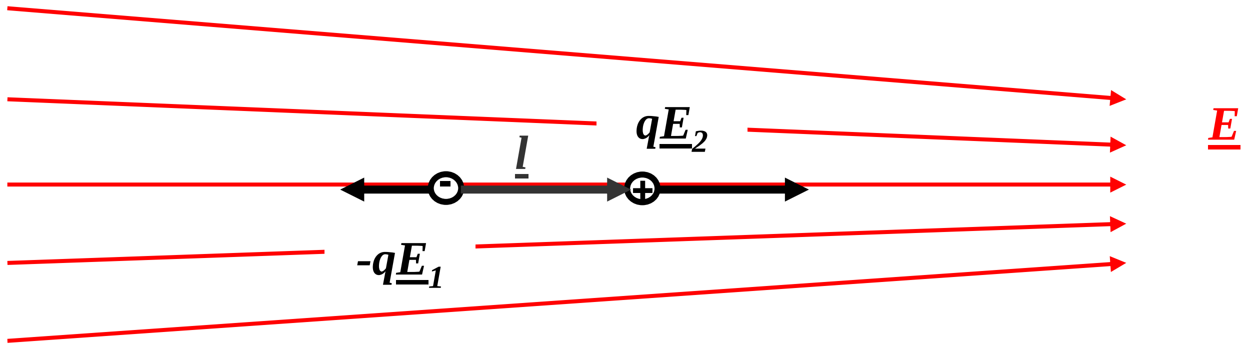
$$\boxed{\vec{M} \overset{(3.6-2)}{=} -q \cdot \vec{r}_1 \times \vec{E} + q \cdot \vec{r}_2 \times \vec{E} = q\vec{l} \times \vec{E}} \quad (3.6.3)$$

- $\underline{l}=\underline{r}_2-\underline{r}_1$. Mit dem elektrischen Dipolmoment $\underline{p}$

$$\boxed{\vec{p} = q \cdot \vec{l}} \quad (3.6.4) \qquad \boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}} \quad (3.6.3a)$$

3.6 Elektrischer Dipol

b) im inhomogenen Feld



- Ist $\underline{l} \parallel \underline{E}$ (lokal) so verschwindet das Drehmoment aber es bleibt nach (3.6.2) eine resultierende Kraft $\underline{F} = (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) \cdot \underline{l}$
- Beispiel: Ionen-Dipol-Wechselwirkung: neutrale Moleküle mit großem Dipolmoment lagern sich an Ionen an, z.B.

$$H_2O + H^+ = H_3O^+$$

4. Magnetostatik

- Magnetismus: Lehre vom magnetischen Feld & den magnetischen Erscheinungen der Materie
- Abgeleitet von *Magnesia*, eine Stadt in Kleinasien, in dessen Nähe sich großes Vorkommen an Magnetit (Fe_30_4) befand
- Magnetostatik: Lehre der Wirkung ruhender magnetischer Körper

4. Magnetostatik

- Historisch:
  - ~600 v Chr.: Thales von Milet: manche Eisenerze besitzen die Fähigkeit, kleine Eisenteilchen anzuziehen.
  - Gilbert (1544-1603):
    - Erstes umfassendes Werk zu magnetischen Erscheinungen.
    - „Terella“ als Modell der magnetischen Erde.
    - Erklärung der Ausrichtung der Magnetnadel im Erdmagnetfeld

4. Magnetostatik

- Historisch:
  - 1820: Ørsted (1777-1851) findet bei Vorlesungsversuchen, dass eine Magnetnadel durch einen stromdurchflossenen Leiter abgelenkt wird.
  - 1820: Arago (1786-1853) entdeckt die Magnetisierung von Eisen durch stromdurchflossene Leiter
  - 1831: Faraday (1791-1867) entdeckt elektromagnetische Induktion
  - 1860: Maxwell (1831-1879): Umfassende Theorie der elektrischen und magnetischen Felder

4.1 Magnetische Kraftwirkung

- Magnetnadeln besitzen zwei Pole

  Nordpol: zeigt nach Norden („+“)

  Südpol: zeigt nach Süden („-“)
- Ungleichnamige Pole ziehen sich an, gleichnamige stoßen sich ab
- ➢ Der geographische Nordpol ist ein magnetischer Südpol
- Im Gegensatz zu elektrischen Polen treten magnetische Pole treten *immer paarweise* auf!

4.1 Magnetische Kraftwirkung

- Coulomb-Gesetz der Magnetostatik Zwei gleichnamige/ungleichnamige magnetische Pole p_1 und p_2 im Abstand $\underline{r}$ stoßen/ziehen sich (im Vakuum) mit folgender Kraft ab/an:

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\mu_r\mu_0} \cdot \frac{p_1 \cdot p_2}{r^2}} \quad (4.1\text{-}1)$$

mit der relativen magnetischen Permeabilität μ_r & magnetische Permeabilitätskonstante

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{V \cdot s/(A \cdot m)}} \quad (4.1\text{-}2)$$

4.1 Magnetische Kraftwirkung

- Erfährt ein positiver Probemagnetpol p die Kraft $\underline{F}$, so ist die magnetische Feldstärke $\underline{H}$ am Ort des Poles

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{F}}{p}} \qquad (4.1\text{-}3)$$

$[\underline{H}]$ = 1 A/m

- Ein Magnetpol P erzeugt im Abstand r ein magnetisches Feld der Stärke (im Vakuum)

$$\boxed{H = \frac{1}{4\pi\mu_r} \cdot \frac{P}{r^2}} \qquad (4.1\text{-}3a)$$

4.1 Magnetische Kraftwirkung

- Magnetische Flussdichte $\underline{B}$ (auch als magnetische Induktion bezeichnet). Für diese gilt im Vakuum

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}} \qquad (4.1\text{-}4)$$

$[\underline{B}] = 1\,\mathrm{Vs}/(\mathrm{m}^2) = 1\ \mathrm{T}$ (Tesla)

- Und allgemein (Ausnahme Ferromagnete)

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}} \qquad (4.1\text{-}5)$$

- Da magnetische Pole immer paarweise auftreten gilt:

$$\boxed{\oiint \vec{B}\,d\vec{A} = 0} \qquad (4.1\text{-}6)$$

4.1 Magnetische Kraftwirkung

- Die magnetische Flussdichte ist vom Betrag gleich dem magnetischen Fluss je Flächeneinheit

$$\boxed{B = \frac{d\Phi}{dA}} \qquad (4.1\text{-}7)$$

- Der magnetische Fluss Φ durch eine beliebig orientierte Fläche ist

$$\boxed{\Phi = \iint \vec{B} d\vec{A}} \qquad (4.1\text{-}8)$$

$[\Phi]$ = 1 Vs = 1 Wb (Weber)

4.1 Magnetische Kraftwirkung

- Φ ist Kraftfeld.
- Zur Untersuchung der Kraftwirkung verwendet man magnetische Dipole (z.B Stabmagnet) mit Polen im Abstand l und dem magnetischen Dipolmoment

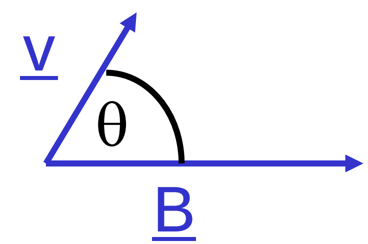
$$\boxed{\vec{m} = \Phi \cdot \vec{l}} \qquad (4.1\text{-}9)$$

- Analogie zum elektrischen Dipol. An Stelle der elektrischen Ladung q $=\Psi$ tritt der Fluss Φ als Maß für den Eigenmagnetismus.
- Magnetischer Dipol erfährt Drehmoment im äußeren Magnetfeld der Stärke $\underline{H}$ (analog 3.6-3a)

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{H}} \qquad (4.1\text{-}10)$$

4.2 Lorentzkraft

- Das magnetische Feld vermittelt nicht nur Kräfte zwischen Magneten sondern auch auf bewegte Ladungen:
- Empirisch
  - $|\underline{F}| \sim q$
  - $|\underline{F}| \sim |\underline{v}|$
  - $\underline{F}$ senkrecht zu $\underline{v}$
  - $|\underline{F}| \sim \sin(\theta)$ θ: Winkel zwischen $\underline{v}$ und $\underline{B}$



- Betrag der Lorentzkraft

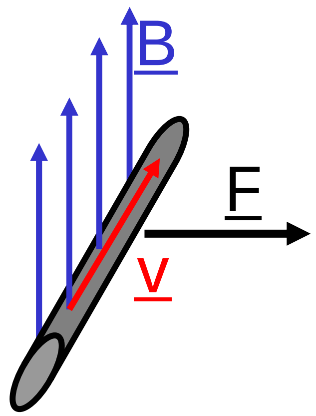
$$\boxed{\left|\vec{F}\right| = q \cdot |\vec{v}| \cdot \left|\vec{B}\right| \sin(\theta)} \qquad (4.2\text{-}1)$$

- Lorentzkraft vektoriell

$$\boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}} \qquad (4.2\text{-}2)$$

4.2 Lorentzkraft

- **Beispiel 1**: Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter:
- Stromstärke $$\boxed{I = \frac{dQ}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{A}} \qquad (4.2\text{-}3)$$
- Stromdichte $$\boxed{\vec{j} = \frac{I}{A} = e \cdot n \cdot \vec{v}} \qquad (4.2\text{-}4)$$
- Ladungsträgerdichte n
- Leiterschnittfläche A



➢ Für alle Ladungen des im B-Feld liegenden Teilstücks der Länge l

$$\boxed{\vec{F} = e \cdot n \cdot l \cdot A \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}} \qquad (4.2\text{-}5)$$

4.2 Lorentzkraft

- **Beispiel 2**: Bewegung einer Punktladung im Magnetfeld:
- Da Bewegungsänderung immer senkrecht zur Geschwindigkeit ist, ändert sich die Richtung nicht aber der Betrag der Geschwindigkeit.
- Annahme: B sei homogen. Teilchen bewege sich mit v senkrecht zum Feld.

➢ Kraft bewirkt Bewegung auf Kreisbahn

➢ Mit 2. Newtonschen Gesetz ($\underline{F} = m \cdot \underline{a}$)

$$F \overset{(4.2-1)}{=} q \cdot v \cdot B \overset{(1.2-3)}{=} m \cdot a \overset{(1.1-26)}{=} m \cdot \omega^2 \cdot r \overset{(1.1-24)}{=} m \cdot \frac{v^2}{r}$$

➢ Radius der Kreisbahn $\boxed{r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}}$ (4.2-6)

4.2 Lorentzkraft

- **Beispiel 2 (Fortsetzung):**
- Umlaufzeit T = 2πr/v

$$\boxed{T = \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{m \cdot v}{q \cdot B}\right)}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B}} \qquad (4.2\text{-}7)$$

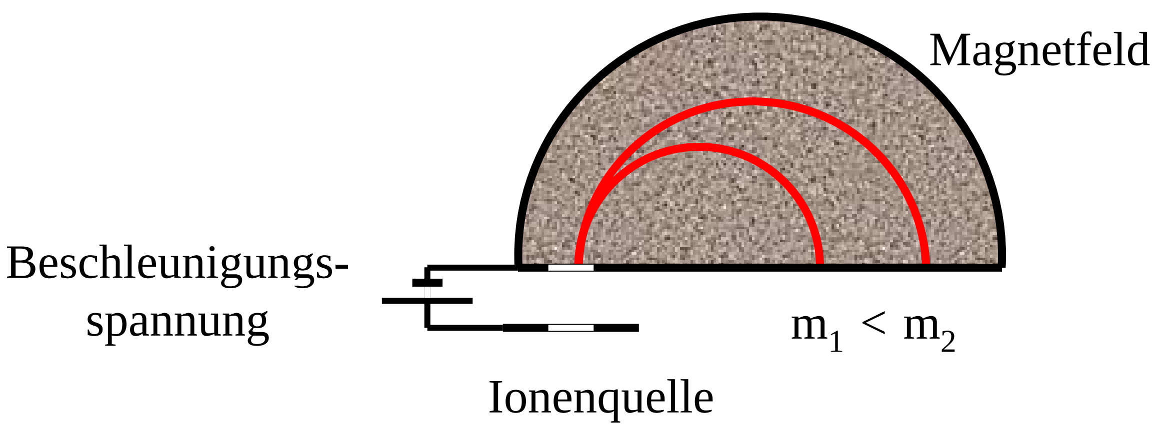
- Zyklotronfrequenz ν = 1/T

$$\boxed{\nu = \frac{q \cdot B}{2 \cdot \pi \cdot m}} \qquad (4.2\text{-}8)$$

➢ Frequenz nicht vom Bahnradius abhängig!

4.2 Lorentzkraft

- **Beispiel 3**: Massenspektrometer:
- Gerät zur Analyse eines Ionenstrahls auf Bestandteile verschiedener Masse
- 1919: Erster Massenspektrometer von F.W. Aston
- Wichtigste Anwendung: Ermittlung der natürlichen Isotopenverhältnisse
  - (z.B. Mg: 78,7%Mg^{24}, 10,1%Mg^{25}, 11,2%Mg^{26})
- Gemessen wird Radius (siehe 4.2-6)



Prinzipieller Aufbau eines Massenspektrometers

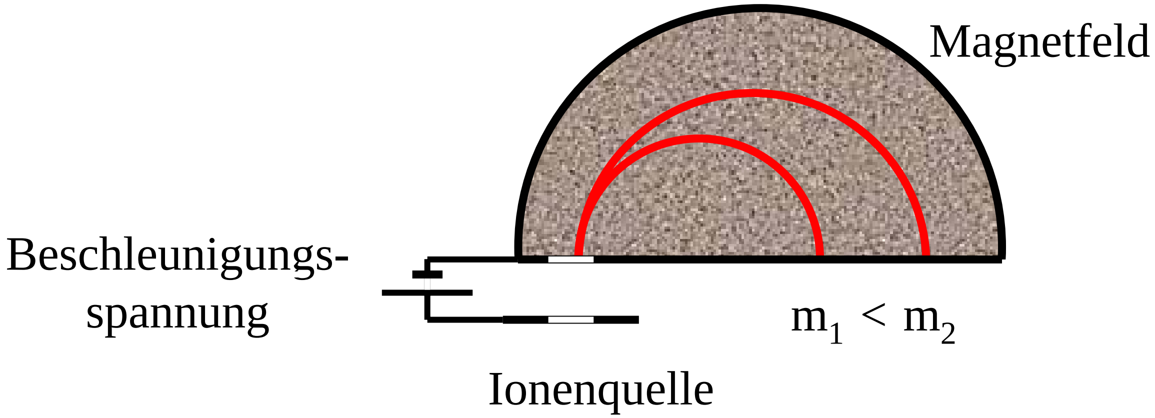
4.2 Lorentzkraft

- **Beispiel 3**: Massenspektrometer:
- Zur Bestimmung noch v nötig
- Annahme: Vor Beschleunigung durch Beschleunigungsspannung v = 0
- danach gilt
- v ist nach 4.2-6 (r = m·v/(q·B))

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = q \cdot U$$

$$v = \frac{r \cdot q \cdot B}{m}$$

$$\boxed{\frac{m}{q} = \frac{r^2 \cdot B^2}{2 \cdot U}} \quad (4.2\text{-}9)$$



Prinzipieller Aufbau eines Massenspektrometers

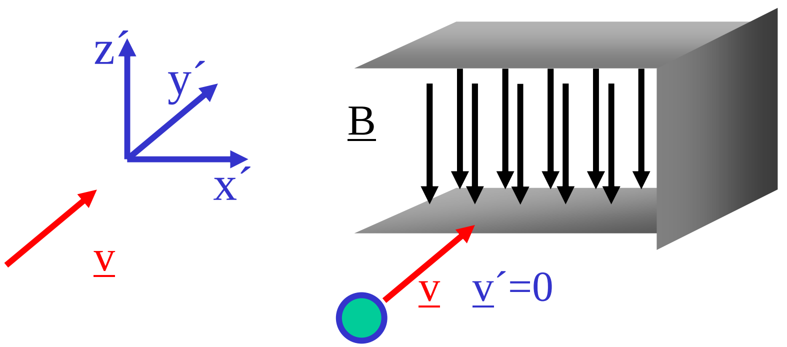
4.2 Lorentzkraft

wenn v nicht bekannt ⇨

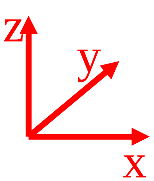
- Massenspektrometer
- Kombination eines E und B Feldes.
- Nutzt aus, dass E-Feld um so stärker ablenkt je kleiner kinetische Energie und B-Feld je größer die kinetische Energie ist.
- Durch geschickte Geometrie Fokussierung auf einen Punkt.

4.3 Relativität der Felder

- Betrachte ein Elektron im bewegten Bezugssystem. Geschwindigkeit des Bezugssystem sei gleich der des Elektrons



- Vom Bezugssystem x,y,z
- Elektron fliegt ins B-Feld
  - ➢ Durch B-Feld Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit
  - ➢ Elektron beschreibt Kreisbahn



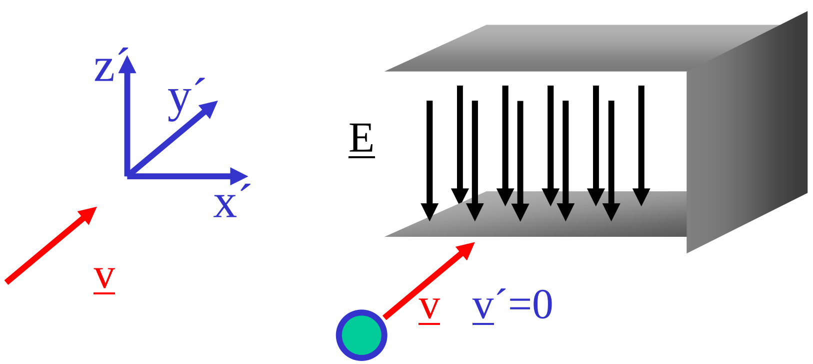
- Vom Bezugssystem x´,y´,z´
- Elektron bewegt sich aus der Ruhe vom Betrachter
  - ➢ In Ruhe geht das nur mit E´ Feld ⇨ Coulomb-Kraft –qE´ $\underline{E}' = \underline{v} \times \underline{B}$
  - ➢ Aus Dynamik ersichtlich, dass für Teilchen in Bewegung auch B‘-Feld wirkt
  - ➢ Bahnbewegung ist Zykloide

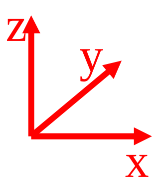
4.3 Relativität der Felder

$$\boxed{\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}} \qquad (4.3\text{-}1)$$

- Aus Symmetrieüberlegungen müsste auch ein elektrisches Feld ein magnetisches Feld B‘ im bewegten Bezugssystem erzeugen

$$\boxed{\vec{B}' = k \cdot \vec{v} \times \vec{E}} \qquad (4.3\text{-}2)$$





- Da E‘ = vxB muss k die Dimension einer inversen Geschwindigkeit^2 haben
- Es zeigt sich, dass $\boxed{k = 1/c^2}$ (4.3-3) ist (c: Lichtgeschwindigkeit)

4.4 Stromdurchflossener Leiter

- Elektrischer Leiter hat E Feld

$$E' = \frac{e \cdot n \cdot A}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot v \cdot r} \qquad (4.4\text{-}1)$$

- Elektrischer Leiter hat E´ - Feld im bewegten Bezugssystem
- Anwendung von 4.3-2 ($\vec{B} = k \cdot (-\vec{v}) \times \vec{E}'$) rückwärts, d.h. in Richtung des ruhenden Systems.

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{E}'\right|}{c^2} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^2 \cdot r} \qquad (4.4\text{-}2)$$