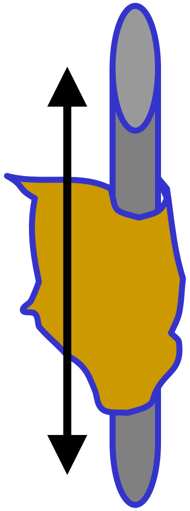
3. Elektrostatik (Motivation)
Nervenzelle

- 18 Jh.: Neurone wie elektrische Leiter.
- ABER: Widerstand des Axoplasmas sehr hoch $2{,}5 \cdot 10^8\,\Omega$ (vergleichbar Holz)
- Weiterleitung durch Prozesse senkrecht zur Zellmembran
- Zellmembran wie ein Kondensator (Ruhepotential -60mV)
- Elektrochemische Prozesse wesentlich
- Zum Verständnis Grundbegriffe der Elektrizitätslehre wichtig

3. Elektrostatik

- Elektrizität:
- ~ 600 v. Chr.: Reibung eines Stabes z.B. aus Bernstein (*ểlektron* griech.) bewirkt Anziehung leichter Körper.
- Elektrostatik: Beschäftigt sich mit ruhenden Ladungen und ihren Feldern



3.1. Elektrische Ladung

- Es gibt positive & negative Ladungen

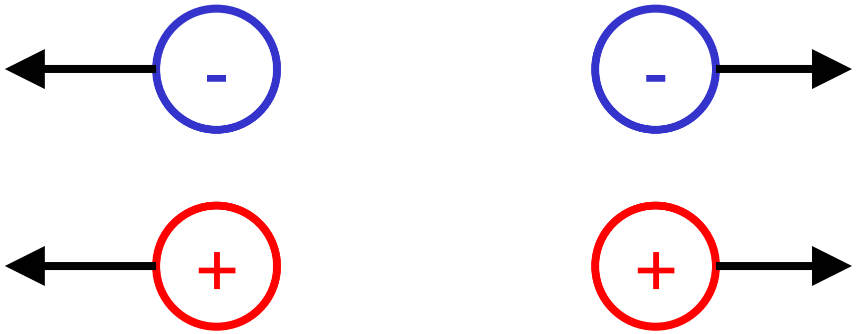
  ⇨ Lichtenbergfiguren

Positive Ladung ⇨ "Nimmt man nun die Röhre mit der bloßen Hand fort und streut Pulver auf die Scheibe, so wird eine strahlende Sonne erscheinen" (Lichtenberg)

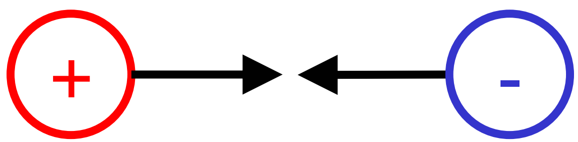
G. C. Lichtenberg 1742-1799

3.1. Elektrische Ladung

- Gleichartige Ladungen stoßen sich ab.



- Ungleichartige Ladungen ziehen sich an.



- Ladungen können nicht erzeugt werden.
- Können in eine ursprünglich neutralen Körper getrennt und umverteilt werden.

3.1. Elektrische Ladung

- Ladungserhaltung: In einem abgeschlossenen System bleibt die Summe aus positiven und negativen Ladungen konstant.
- Ladung ist gequantelt, d.h. sie ist ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung

$$\boxed{e_0 = 1{,}602176 \cdot 10^{-19}\ \text{C (Coulomb)}} \qquad (3.1\text{-}1)$$

(Ladung eines Elektrons/Protons)

- Allgemein: Ladung q

  [q] = 1 C = 1 As, manchmal 1 e = 1 e_0

3.2 Coulombsches Gesetz

C. A. Coulomb
(1736 - 1806)

- Zwei elektrische Ladungen q_1 und q_2 deren Abstand r groß gegenüber ihre Ausdehnung ist, stoßen/ziehen sich bei gleichartig/ungleichartiger Ladung mit der folgenden Kraft ab/an:

$$\boxed{F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}} \qquad (3.2\text{-}1)$$

mit $\boxed{k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}}$ (3.2-2) für das Vakuum

- Influenzkonstante (elektrische Feldkonstante)

$$\boxed{\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{A^2 \cdot s^4/(kg \cdot m^3)}} \qquad (3.2\text{-}3)$$

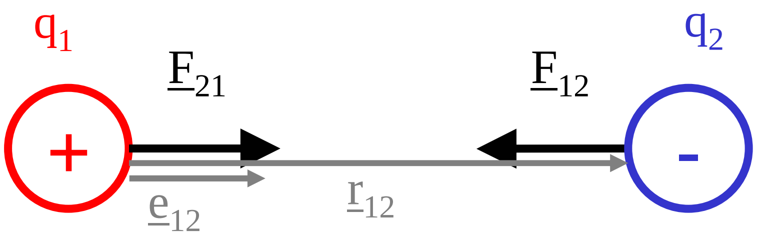
3.2 Coulombsches Gesetz

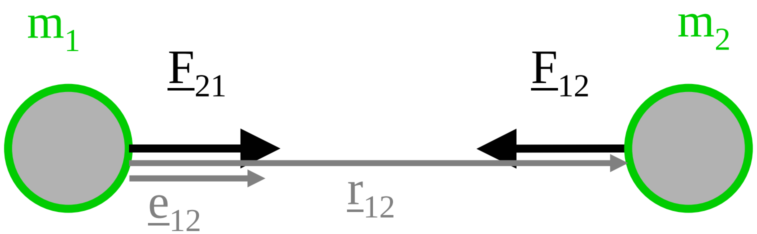
- Coulombkraft vektoriell

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{e}_{12}} \quad (3.2\text{-}1a)$$

- Gravitationskraft vektoriell (siehe 1.2.2)

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{e}_{12}} \quad (1.2\text{-}9a)$$





- Coulombkraft kann abstoßend oder anziehend sein
- Ladung bleibt in abgeschlossenen Systemen immer erhalten

- Gravitationskraft ist immer anziehend
- Masse hängt (relativistisch betrachtet) vom Bewegungszustand ab

Kräfte addieren sich vektoriell (Superpostionsprinzip)

3.3 Elektrisches Feldstärke & Flussdichte

- Trägt ein Körper die Ladung q und erfährt die Kraft $\underline{F}$, so ist die elektrische Feldstärke $\underline{E}$ am Ort des Körpers

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}} \qquad (3.3\text{-}1)$$

$[\underline{E}]$ = N/C = kg·m/(A·s³)

Feldstärke einer Punktladung q_1 im Vakuum (3.2-1 & 3.3-1)

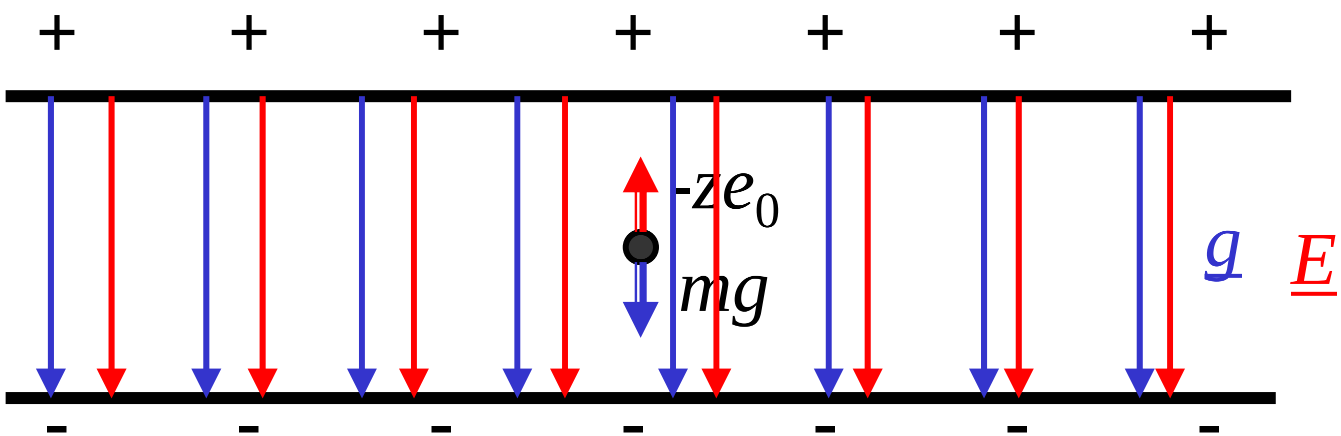
$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2} \vec{e}_r} \qquad (3.3\text{-}2)$$

Bemerkung: Ebenso Gravitationsfeldstärke einer Masse m_1 definierbar

$$\boxed{\vec{g} = G \cdot \frac{m_1}{r^2} \vec{e}_r} \qquad (3.3\text{-}3)$$

3.3 Elektrisches Feldstärke & Flussdichte

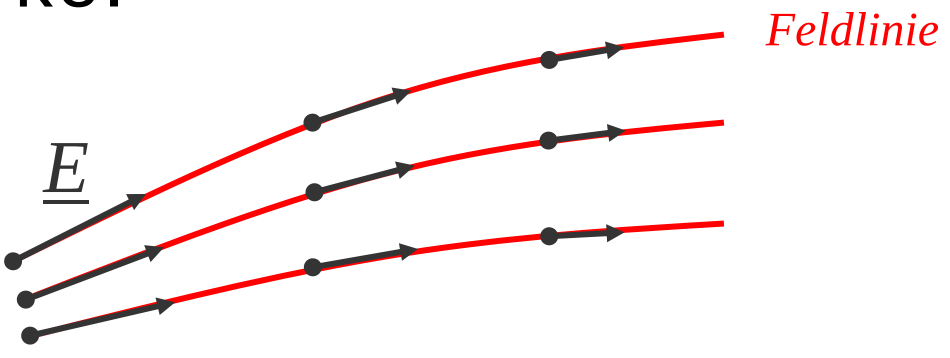
- Anwendung: Millikan-Methode zur Bestimmung der Größe der Elementarladung



- Öltropchen haben Ladung $-z \cdot e_0$. Das elektrsische Feld des Kondensator wird in seiner Stärke so eingestellt, dass der Öltropfen schwebt.
- Masse bestimmbar über Kugelfaserviskosimeter (siehe z.B. Stroppe, Kap. 15)

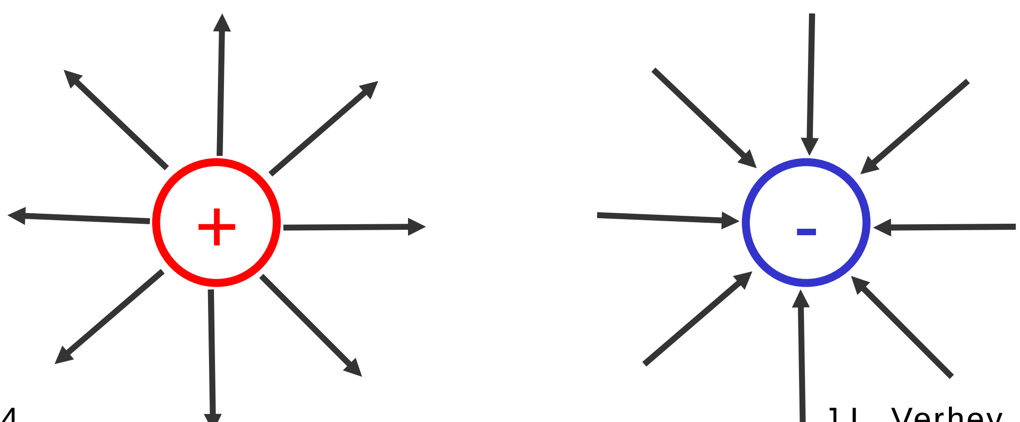
3.3 Elektrisches Feldstärke & Flussdichte

- (Elektrische) Felder werden durch Feldlinienbilder dargestellt. Die Feldlinien zeigen in jenem Punkt in Richtung der Feldstärke. Die relative Dichte der Feldlinien ist ein Maß für die Feldstärke.



3.3 Elektrisches Feldstärke & Flussdichte

- Statische elektrische Feldlinien haben ihren Ursprung und Endpunkt in ruhenden Ladungen
- Sie gehen immer von positiven zu negativen Ladungen
- Das statische elektrische Feld ist ein wirbelfreies Quellenfeld mit Quellen (positive Ladungen) und Senken (negative Ladungen)



3.3 Elektrisches Feldstärke & Flussdichte

- Der elektrische Fluss ϕ ist die Gesamtheit der Feldlinien, die ein Flächenstück A senkrecht durchsetzen

$$\boxed{\phi = \iint \vec{E} d\vec{A}} \qquad (3.3\text{-}4)$$

$[\phi]$ = kg·m³/(A·s³)

- Manchmal auch über den Verschiebungsvektor

$$\boxed{\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}} \qquad (3.3\text{-}5)$$

(im Vakuum) definiert.

- Für den so definierten elektrischen Fluss Ψ gilt für eine geschlossene Fläche (z.B Kugel):

$$\boxed{\Psi = \oiint \vec{D} d\vec{A} = \sum_i q_i} \qquad (3.3\text{-}6)$$

$[\Psi]$ = 1 C = 1 A·s

(Elektrische Durchflutungsgesetz)

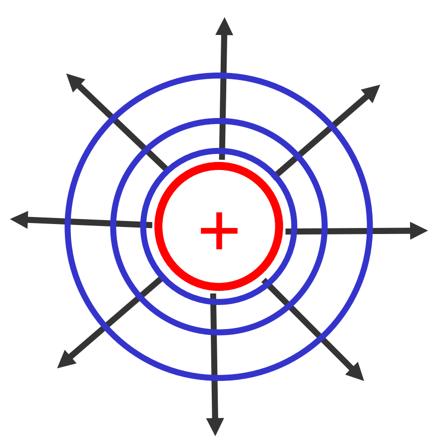
3.4 Spannung & Potential

- Entsprechend (1.2-14) ist die im elektrischen Feld geleistete Verschiebungsarbeit

$$\boxed{A_{12} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,d\vec{r} \overset{(3.3-1)}{=} -q\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\,d\vec{r}} \qquad (3.4\text{-}1)$$

- Elektrostatisches Potential:

$$\boxed{\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\,d\vec{r}} \qquad (3.4\text{-}2)$$



Äquipotentialflächen
(φ= const.)

3.4 Spannung & Potential

- Die elektrische Feldstärke $\underline{E}$ ist der negative Gradient des Potentials φ

$$\boxed{\vec{E} = -grad\varphi = \vec{\nabla}\varphi} \qquad (3.4\text{-}3)$$

- Die Feldlinien zeigen in Richtung des größten Potentialabfalles.
- Bemerkung: Der Gradient ist (in kartesischen Koordinaten) wie folgt definiert:

$$\boxed{\vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z \right)} \qquad (3.4\text{-}4)$$

3.4 Spannung & Potential

- Spannung zwischen zwei Punkten r_1 & r_2:

$$\boxed{U_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\,d\vec{r} = \varphi(r_2) - \varphi(r_1)} \qquad (3.4\text{-}5)$$

[U] = 1 kg·m^2/(A·s^3) = 1 V (Volt)

- Beispiel: Spannung im Abstand R von einer Punktladung q gegenüber unendlich

(Potential = 0)

(3.4-6)

$$\boxed{U(R) \overset{(3.4-5)}{=} \varphi(R) - \varphi(\infty) \overset{(3.4-2)}{=} -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\,d\vec{r} + 0 \overset{(3.3-2)}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

3.4 Spannung & Potential

- Kapazität C der freistehenden Kugel/Punkt- Ladung

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (3.4\text{-}7)$$

- Allgemein $\boxed{C = q/U}$ (3.4-8) [c] = 1 F (Farad) = 1 C/V
- Kapazität eines Kondensators der Fläche A mit Abstand d und der Ladung Q:

$$U = -\int_0^d \vec{E}\,d\vec{r} \overset{E\text{ homogen}}{=} E \cdot d \overset{(3.3-5)}{=} \frac{D}{\varepsilon_0} \cdot d \overset{(3.3-6)}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \cdot d$$

$$\boxed{\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}} \qquad (3.4\text{-}9)$$

3.5 Potential an der Zellmembran eines Neurons

- Ausgangspunkt: Nernstgleichung
- Nernst betrachtete die Diffusion von Elektrolyten unter Berücksichtigung der Coulombkraft und des osmotischen Drucks. Daraus konnte er folgenden Gleichung ableiten (z: Wertigkeit, T: Temperatur, F: Faradaykonstante 96485,34 C/mol, R Gaskonstante)

$$\boxed{E = \frac{R \cdot T}{z \cdot F} \ln\left(\frac{[X]_{außen}}{[X]_{innen}}\right)} \qquad (3.5\text{-}1)$$

- Für einwertig positives Ion bei T=309K(36^{0}C) vereinfacht:

$$\boxed{E = 61{,}3 mV \cdot \log\left(\frac{[X]_{außen}}{[X]_{innen}}\right)} \qquad (3.5\text{-}2)$$

3.5 Potential an der Zellmembran eines Neurons

- Konzentrationsquotient von Kalium plus 1/10

$$\boxed{E_{K^+} = 61{,}3mV \cdot \log(0{,}1) = -61{,}3mV} \qquad (3.5\text{-}3)$$

- Zellmembran ist dünne isolierende Schicht ⇨ wirkt wie Kondensator. Mit Kapazität C = 0,01μF pro mm^2 für die meisten Zellmembranen ist die Ladung pro mm^2 (3.4-8)

$$Q = C \cdot U \overset{(3.5-3)}{=} 0{,}01\mu F \cdot 61{,}3mV = 6{,}13 \cdot 10^{-10}\,C \qquad (3.5\text{-}3)$$

$$Q \overset{(3.1-1)}{=} \frac{6{,}13 \cdot 10^{-10}\,C}{1{,}602176 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} e_0 = 3{,}8 \cdot 10^9 e_0 \qquad (3.5\text{-}3a)$$