1.2.2 Gravitationsgesetz

- Herleitung aus Planetenbewegung

- **Keplersche Gesetze**
  1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen
  2. Der von Sonne zum Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
  3. Die Quadtrate der Umlaufzeit verhalten sich wie die dritte Potenz der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

Kepler (1571-1630)

- Vereinfachung: Annahme einer Kreisbewegung

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = const.} \qquad (1.2\text{-}6)$$

1.2.2 Gravitationsgesetz (Fortsetzung)

- Aus Lex secunda für Kreisbewegung
  - $\boxed{\underline{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \underline{r}}$ (1.2-7) (aus 1.2-3 & 1.1-26)
- Mit 1.2.6 und $\omega = 2\pi/T$
  - $\boxed{\underline{F} = -m \cdot ((2\pi)^2/T^2) \cdot \underline{r} = -\text{const.} \cdot m/r^2 \cdot \underline{e}_r}$ (1.2-8)
- Aus Lex tertia
  - Anziehungskraft $F = F(m_1, m_2)$
  - $F \sim m_1$ und $F \sim m_2$

1.2.2 Gravitationsgesetz

- Seien m_1 und m_2 die jeweiligen Massen der beiden Körper, so ist die Anziehungskraft gegeben durch

$$\boxed{F_G = \frac{m_1 m_2 G}{r^2}} \quad (1.2\text{-}5)$$

- Gravitationskonstante

$$\boxed{G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}} \quad (1.2\text{-}6)$$

Zum ersten Mal 1798 von H.Cavendish (1731 - 1810) mit Gravitaionswaage bestimmt

1.2.2 Gravitationsgesetz (Fortsetzung)

- Beispiel: „Gewicht eines Menschen“
- Normalerweise mit Federwaage gemessen
- Auslenkung $\underline{x}$ proportional zur Kraft $\underline{F}$

$$\boxed{\underline{F} = -k \cdot \underline{x}} \qquad (1.2.11)$$

➢ **Kraft und nicht Masse wird gemessen!**

1.2.2 Gravitationsgesetz (Fortsetzung)

- **<u>„Tipp zum Abnehmen“</u>**

➢ neuer Wohnort Mond

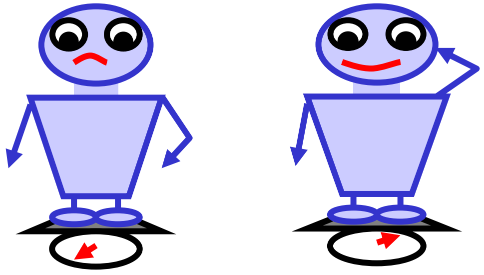
– m_{Erde} = 5,98·10^24^kg r=6,378·10^6^m

– m_{Mond} = 0,073·10^24^kg r=1,738·10^6^m

$$g = \frac{mG}{r^2} \quad (1.2\text{-}12)$$

$$g_{Erde} = \frac{m_{Erde}G}{r^2} = 9.809\frac{m}{s^2} \quad (1.2\text{-}12a)$$

$$g_{Mond} = \frac{m_{Mond}G}{r^2} = 1.613\frac{m}{s^2} = 0.16 g_{Erde} \quad (1.2\text{-}12b)$$



Erde **Mond**

„75kg“ **„12kg“**

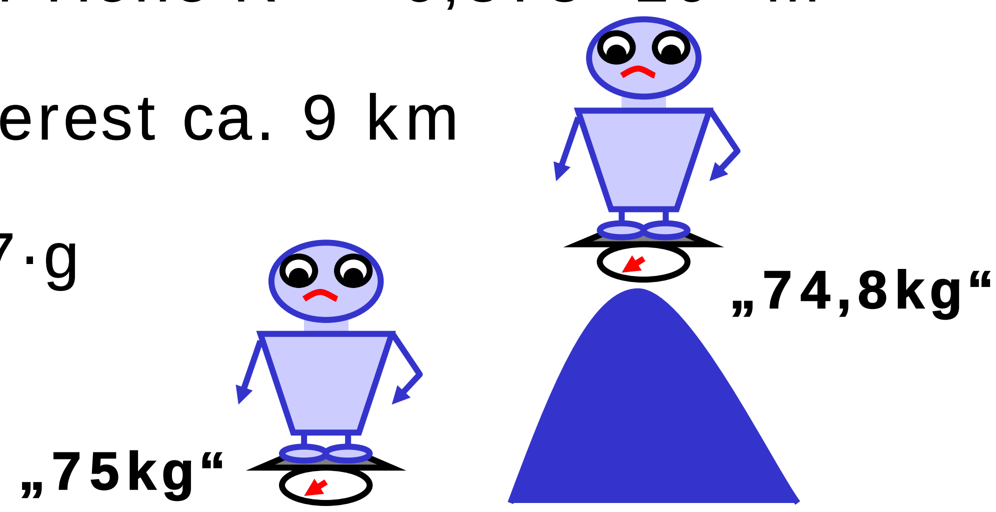
1.2.2 Gravitationsgesetz (Fortsetzung)

- **<u>„Erdlösung zum Abnehmen ungenügend“</u>**
- Fallbeschleunigung in Höhe h aus $g = \frac{mG}{r^2}$ (1.2-12)

$$\boxed{g(h) = g\frac{R^2}{(R+h)^2}} \qquad (1.2\text{-}13)$$

- g = 9.809 kg m/s^2 für Höhe R = 6,378 ·10^6 m
- Höhe h des Mount Everest ca. 9 km

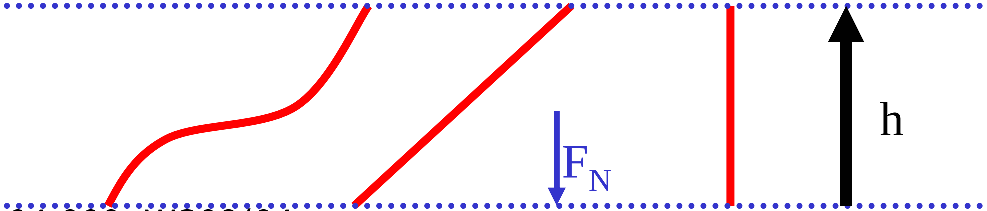
$$g_{\text{M. Everest}} = 0.997 \cdot g$$



1.2.3 Potentielle Energie

- Arbeit (differentiell) $\Delta A=\underline{F}\cdot\Delta\underline{s}$ (1.2-4)
- Arbeit $A=\int\vec{F}d\vec{s}$ (1.2-5)
- <u>Verschiebungsarbeit</u>
  - Wenn Kraft der Bewegung entgegenwirkt, so ist für Verschiebung ohne Beschleunigung eine entgegengesetzt gleich große Kraft $-\underline{F}$ erforderlich
- Beispiel: Arbeit gegen die Schwerkraft

$$\boxed{A=-\int\vec{F}d\vec{s}=-m\cdot g\cdot h\cdot\cos(\pi)=m\cdot g\cdot h} \quad (1.2\text{-}14)$$



Auf allen Bahnkurven wird die gleiche Arbeit W=m·g·h verrichtet!

1.2.3 Potentielle Energie (Fortsetzung)

- **Konservative Kräfte**

  Kräfte, bei denen die gegen sie gerichtete Arbeit nur von Anfang und Endpunkt der Bewegung abhängt, d.h. unabhängig vom Weg ist.

- Gespeicherte Arbeit ⇨ **potentielle Energie**

- **Energie: Energie kennzeichnet das in einem System von Teilchen enthaltene Arbeitsvermögen**

1.2.3 Potentielle Energie (Fortsetzung)

- **Potentielle Energie**

(1.2-15)

$$\boxed{\Delta E_{Pot} = E(r_2)_{Pot} - E(r_1)_{Pot} = -\int_o^r \vec{F} d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad E(r_2) = E(r_1) - \int_o^r \vec{F} d\vec{s}}$$

- **Beispiel: Potentielle Energie in Höhe h**

Sei $E(r_1=0) = 0$ dann ist (Benutzung von 1.2-14)

$$\boxed{E(h)_{Pot} = m \cdot g \cdot h}$$

(1.2-16)

1.2.4 Leistung und kinetische Energie

- **Leistung**

Die Änderung der Energie pro Zeiteinheit

$$\boxed{P = \frac{dE}{dt}} \qquad (1.2.17)$$

[P] = 1 J/s = 1 W (Watt)

- **Kinetische Energie**

Mutipliziere (1.2-3) mit dr/dt. $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \cdot \dot{\vec{r}}^{\,2}\right)$

⇨ kinetische Energie $\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{1}{2} m \cdot \vec{v}^{\,2}}$ (1.2-18)

1.2.5 Mechanischer Energieerhaltungssatz

- In einem konservativen System bleibt die Gesamtenergie (mechanische Energie)

$$\boxed{E_g = E_{kin} + E_{pot}} \qquad (1.2\text{-}19)$$

  konstant.

- Gesamtenergie ist Erhaltungsgröße

1.2.6 Nichtkonservative Kräfte: Reibung

- Reibungskräfte (Beispiele)

  - **Coulombreibung** (trockener Reibung)

$$\boxed{\begin{array}{l} F_{RH}=\mu_0 F_N \\ F_{RG}=\mu F_N \end{array}}$$

(Haftreibung, 1.2-20)

(Gleitreibung, 1.2-21)

  - **Newton Reibung**

$$\boxed{F_{RH}=1/2\cdot c_w\cdot\rho\cdot A\cdot v^2} \quad (1.2\text{-}22)$$

Querschnitt des Körpers A, Widerstandskoeffzient c_w

Geschwindigkeit v, $\boxed{\text{Dichte } \rho = \text{Masse/Volumen}}$ (1.2-23)

1.3 Systeme von Massepunkten

- Impulserhaltung: Wenn keine äußeren Kräfte anliegen, so bleibt der Gesamtimpuls erhalten

$$\boxed{\vec{p}_{ges} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = 0} \qquad (1.3\text{-}1)$$

- Beispiel Stoß zweier Teilchen

$$\boxed{m_1 \vec{v}_{1vor} + m_2 \vec{v}_{2vor} = m_1 \vec{v}_{1nach} + m_2 \vec{v}_{2nach}} \qquad (1.3\text{-}2)$$

➢ Selbst bei Kenntnis aller Anfangswerte ($_{vor}$) noch zwei Unbekannte $\underline{v}_{1nach}$ & $\underline{v}_{2nach}$!

1.3 Systeme von Massepunkten Fortsetzung

- Energiebilanz:

(1.3-3)

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1(\vec{v}_{1vor})^2+\frac{1}{2}m_2(\vec{v}_{2vor})^2=\frac{1}{2}m_1(\vec{v}_{1nach})^2+\frac{1}{2}m_2(\vec{v}_{2nach})^2+Q}$$

Q während des Stosses in innere Energie (z.B. durch Verformung) umgewandelter Anteil

Q = 0 ⇨ elastischer Stoß

- Beispiel: Unelastischer Stoß zweier Teilchen

➢ $\underline{v}_{1nach} = \underline{v}_{2nach} = \underline{v}_{nach}$

$$\boxed{m_1\vec{v}_{1vor}+m_2\vec{v}_{2vor}=(m_1+m_2)\cdot\vec{v}_{nach}} \qquad (1.3\text{-}4)$$

Q > 0

1.3 Systeme von Massepunkten Fortsetzung

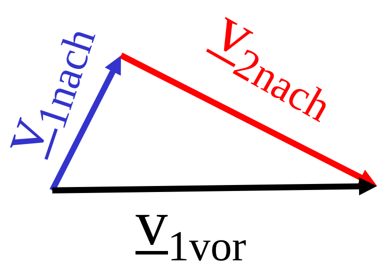
- Beispiel: Schiefer elastischer Stoß eines Teilchen auf ein ruhendes Teilchen mit gleicher Masse

➢ Aus 1.3-2 folgt mit gleicher Masse und $\underline{v}_{2vor}=0$

$$\boxed{\vec{v}_{1vor} = \vec{v}_{1nach} + \vec{v}_{2nach}} \quad (1.3\text{-}5)$$

➢ Aus 1.3-3 folgt mit gleicher Masse und $\underline{v}_{2vor}=0$ sowie Q=0 (elastisch)

$$\boxed{(\vec{v}_{1vor})^2 = (\vec{v}_{1nach})^2 + (\vec{v}_{2nach})^2} \quad (1.3\text{-}6)$$



$\underline{v}_{1nach}$ senkrecht zu $\underline{v}_{2nach}$

1.3.1 Drehbewegungen

- Kinetische Energie eines Massenpunktes bei gleichförmiger Kreisbewegung

$$\boxed{\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2}m\cdot(\omega r)^2 = \frac{1}{2}J\omega^2} \quad (1.3\text{-}7)$$

mit <u>Massenträgheitsmoment</u> $\boxed{J = mr^2}$ (1.3-8)

[J] = 1 kg m^2

- Bei vielen Massepunkten Δm_i gilt entsprechend

$$\boxed{J = \Sigma \Delta m_i r_i^{\,2} = \int r^2 dm} \quad (1.3\text{-}9)$$

- Rotationsenergieänderung (nutze 1.1-12d & 1.2-25)

$$\boxed{dE = \underline{F}\cdot d\underline{r} = \underline{F}\cdot(d\underline{\phi} x \underline{r}) = (\underline{r} x \underline{F})\cdot d\underline{\phi}} \quad (1.3\text{-}10)$$

$\boxed{M = (\underline{r} x \underline{F})}$ (1.3-11) Drehmoment

1.3.1 Drehbewegungen

- Leistung P (nach 1.2-18)

$$\boxed{P = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = J\dot{\omega}\omega} \qquad (1.3\text{-}12)$$

- Andererseits (nach 1.3-10 mit 1.3-11)

$$\boxed{P = \frac{dE}{dt} = M\omega} \qquad (1.3\text{-}13)$$

- Bewegungsgleichung für rotierende Körper

$$\boxed{M = J\dot{\omega} = \frac{d}{dt}(J\omega) = \dot{L}} \qquad (1.3\text{-}14)$$

- mit Drehimpuls $\boxed{L = J\omega}$ $(1.3\text{–}15)$

  Für L gilt entsprechend Drehimpulserhaltungssatz

Tabelle mit jeweils analogen Größen:

Translation	**Rotation**
Länge L	Winkel φ
Masse m	Trägheitsmoment J (auch Θ)
Geschwindigkeit v	Winkelgeschwindigkeit ω
Impuls $p=m\cdot v$	Drehimpuls $L=\mathrm{J}\cdot\omega$
Kraft F	Drehmoment $M=r\times F$
Bewegungsgleichung $F=\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ (2. Newtonsches Axiom)	Bewegungsgleichung $M=\mathrm{d}L/\mathrm{d}t$
kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}}=1/2\cdot m\cdot v^2$	Rotationsenergie $E_{\mathrm{rot}}=1/2\cdot\mathrm{J}\cdot\omega^2$