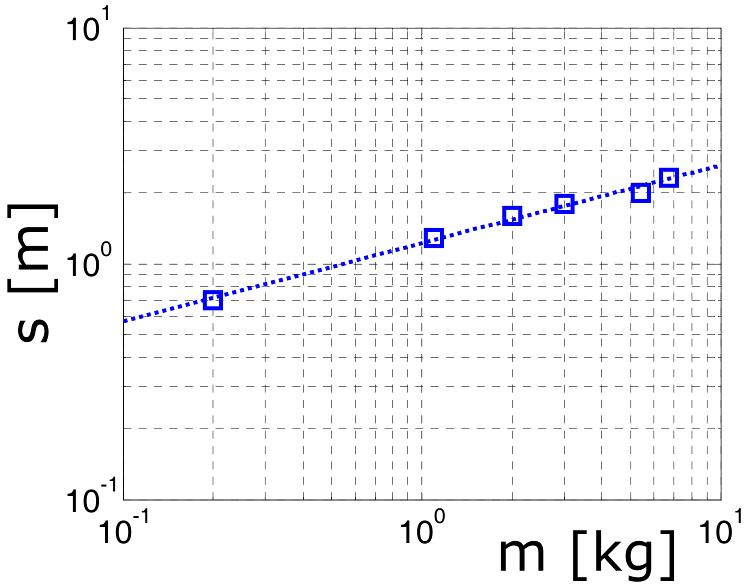
0.6.4) Lineare Regression

Wenn wir fliegen könnten und den Greifvögeln ähnlich…

	Masse m [kg]	Spannweite s [m]
Bussard	1	1,3
Fischadler	2,0	1,6
Schelladler	3	1,8
Steinadler	6,7	2,3
Turmfalke	0,2	0,7
Weißkopfadler	5,4	2.0



$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 = \min.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \; ; \; \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad (0.6.7) \\ b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad (0.6.8) \end{gathered}}$$

Annahme eines Zusammenhanges

$s = a \cdot m^b \Rightarrow \log(s) = \log(a) + b\log(m)$

$\log(s) = 0.0866 + 0.3304 \log(m)$

Mensch (75kg) braucht eine Spannweite von 5 m zum Fliegen

1 Mechanik der Punktmassen

- 1.1 Kinematik: Lehre vom „wie“ der Bewegung (nicht dem „warum“)
  - 1.1.1 Einleitung: Bewegung hat eine Richtung
  - 1.1.2 Mathematischer Exkurs: Vektoren
    - Addition von Vektoren
    - Multiplikation mit einem Skalar

1.1.2 Mathematischer Exkurs (Fortsetzung) Vektoren

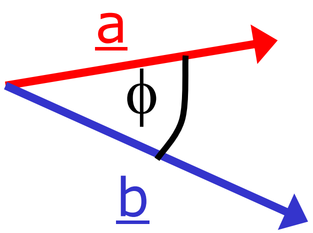
- $-\underline{a}$ ist entgegengesetzt gleicher Vektor
- Nullvektor $\underline{0}$: $\underline{a}+\underline{0}=\underline{a}$

$$\boxed{\underline{0}=\underline{a}+(-\underline{a}),\ |\underline{0}|=0} \qquad (1.1\text{-}4)$$

- Einheitsvektor

$$\boxed{\underline{e}_a = (1/|\underline{a}|)\ \underline{a}} \qquad (1.1\text{-}5)$$

1.1.2 Mathematischer Exkurs (Fortsetzung) Vektoren



- Skalarprodukt von Vektoren

$$\boxed{d=\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos(\phi)} \qquad (1.1\text{-}6)$$

d ist Skalar! (Element von R^1)

- Rechenregeln

• $(\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{c}=\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{b}\cdot\underline{c}$	(Distributivität)	(1.1-7abc)
• $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a}$	(Kommutativität)	
• $\lambda(\underline{a}\cdot\underline{b})=(\lambda\underline{a})\cdot\underline{b}$	(Assoziativität mit Skalar)	

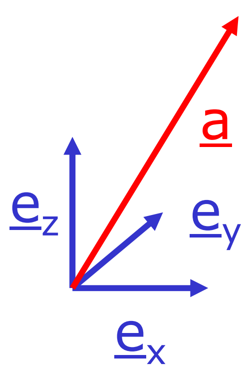
- Bemerkung: Manchmal wird Skalarprodukt auch $\langle\underline{a},\underline{b}\rangle$ geschrieben

1.1.2 Mathematischer Exkurs (Fortsetzung) Vektoren

- Koordinatendarstellung von Vektoren (3D Beispiel)

  Seien $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$ paarweise orthogonale (senkrecht zueinander) Einheitsvektoren. So lässt sich jeder Vektor im R^3 durch diese Vektoren darstellen

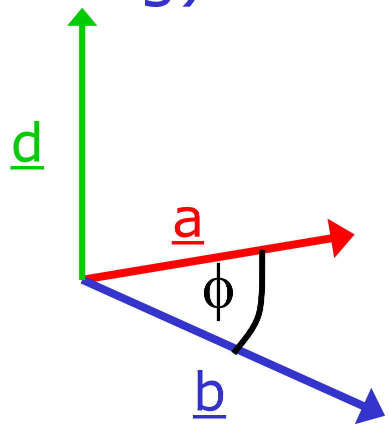
➢ $\boxed{\begin{array}{l}\underline{a}=a_x\underline{e}_x+a_y\underline{e}_y+a_z\underline{e}_z=(a_x,a_y,a_z) \text{ mit} \\ a_x=\underline{a}\cdot\underline{e}_x\,,\; a_y=\underline{a}\cdot\underline{e}_y\,,\; a_z=\underline{a}\cdot\underline{e}_z\end{array}}$ (1.1-8)



Betrag $|\underline{a}|$ =

$$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}} \qquad (1.1\text{-}9)$$

1.1.2 Mathematischer Exkurs (Fortsetzung) Vektoren



- Vektorprodukt

  d=axb (sprich „a kreuz b")

  d ist Vektor!

  d steht senkrecht auf a und b

axb =

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x(a_y b_z - a_z b_y)+\vec{e}_y(a_z b_x - a_x b_z)+\vec{e}_z(a_x b_y - a_y b_x)$$ (1.1-10)

axb = |a||b|sin(ϕ) (1.1-11)

1.1.2 Mathematischer Exkurs (Fortsetzung) Vektoren

- Rechenregeln

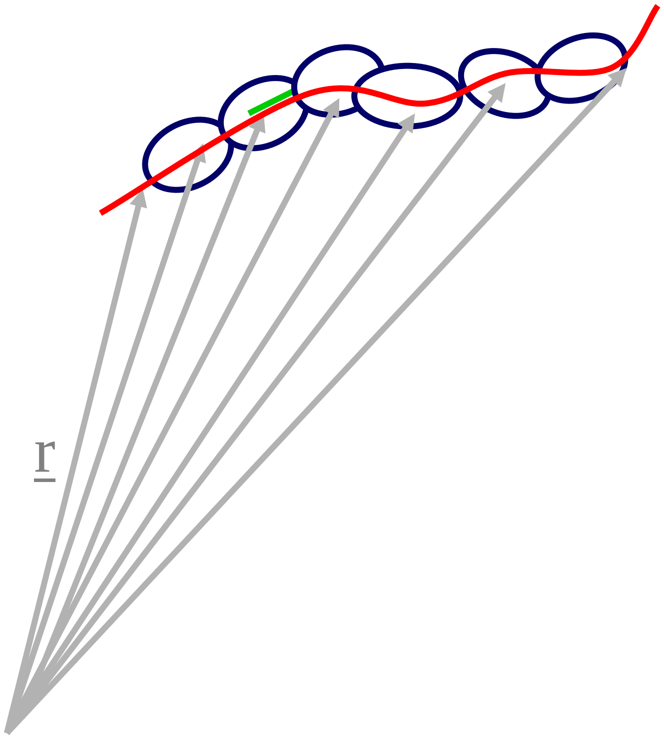
o $\underline{a}\times\underline{b}=-\underline{b}\times\underline{a}$ (keine Kommutativität)

o $\underline{a}\times(\underline{b}+\underline{c}) =\underline{a}\times\underline{b}+\underline{a}\times\underline{c}$ (Distributivität) (1.1-12abc)

o $\lambda(\underline{a}\times\underline{b})=(\lambda\underline{a})\times\underline{b}=\underline{a}\times(\lambda\underline{b})$ (Assoziativität mit Skalar)

- Bemerkung: Im Allgemeinen $(a\times b)\times c \neq a\times(b\times c)$
- Ist $\underline{a}\uparrow\uparrow\underline{b}$ („a parallel b") dann ist $\underline{a}\times\underline{b}=\underline{0}$ (siehe 1.1-11)

1.1.4 Ortsvektor und Geschwindigkeit



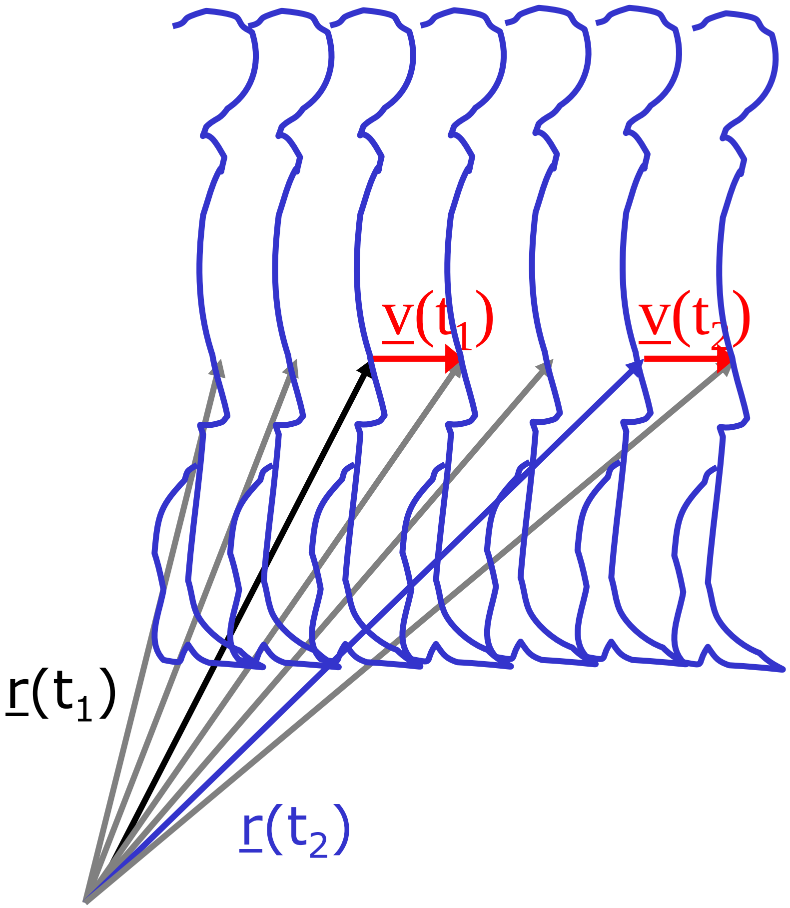
Banhbewegung der Hutes in Luigi Russolo (1912) „*Plastic Synthesis of a Woman's Movements*“

- Die Bahnkurve beschreibt Ortsvektor r zu einem Punkt als Funktion der Zeit r=r(t)
- Vektor v der Geschwindigkeit

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}} \qquad (1.1\text{-}13)$$

- Beispielbewegung weder geradlinig (Bahnkurve gekrümmt) noch gleichförmig (|v|≠const.)

1.1.5 Gleichförmige Bewegung



- Gleichförmig:

  $|\underline{v}| = \text{const.}$

- Geradlinig: $\underline{v}(t_1)=\underline{v}(t_2)$

  für alle t_1, t_2

In Balla (1912) „*Bambina che corre sul balcone* “ ist die Bewegung geradlinig gleichförmig

1.1.5 Gleichförmige Bewegung (Fortsetzung)

- Beschleunigung <u>a</u>: Zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}) = \ddot{\vec{r}}} \qquad (1.1\text{-}14)$$

- Für eine geradlinige gleichförmige Bewegung ist |<u>a</u>| = 0
- Aus Beschleunigung lässt sich die momentan Geschwindigkeit bis auf Konstante bestimmen

1.1.6 Geichmäßig beschleunigte Bewegung

- Beschleunigung $\underline{a}$=const.
- Geschwindigkeit v(t) =

$$\boxed{\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t)dt = \vec{v}_0 + \vec{a}t} \qquad (1.1\text{-}15)$$

- Ortsvektor

$$\boxed{\vec{s}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)dt = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2} \qquad (1.1\text{-}16)$$

1.1.7 Beispiel für gleichförmig beschleunigte Bewegung: Messung zum freien Fall von Galilei

- Messung des Weges, den ein Körper in einer bestimmten Zeit durchfällt.
- Anfangsgeschwindigkeit $\underline{v}_0 = 0$
- Anfangsort $\underline{s}_0 = 0$

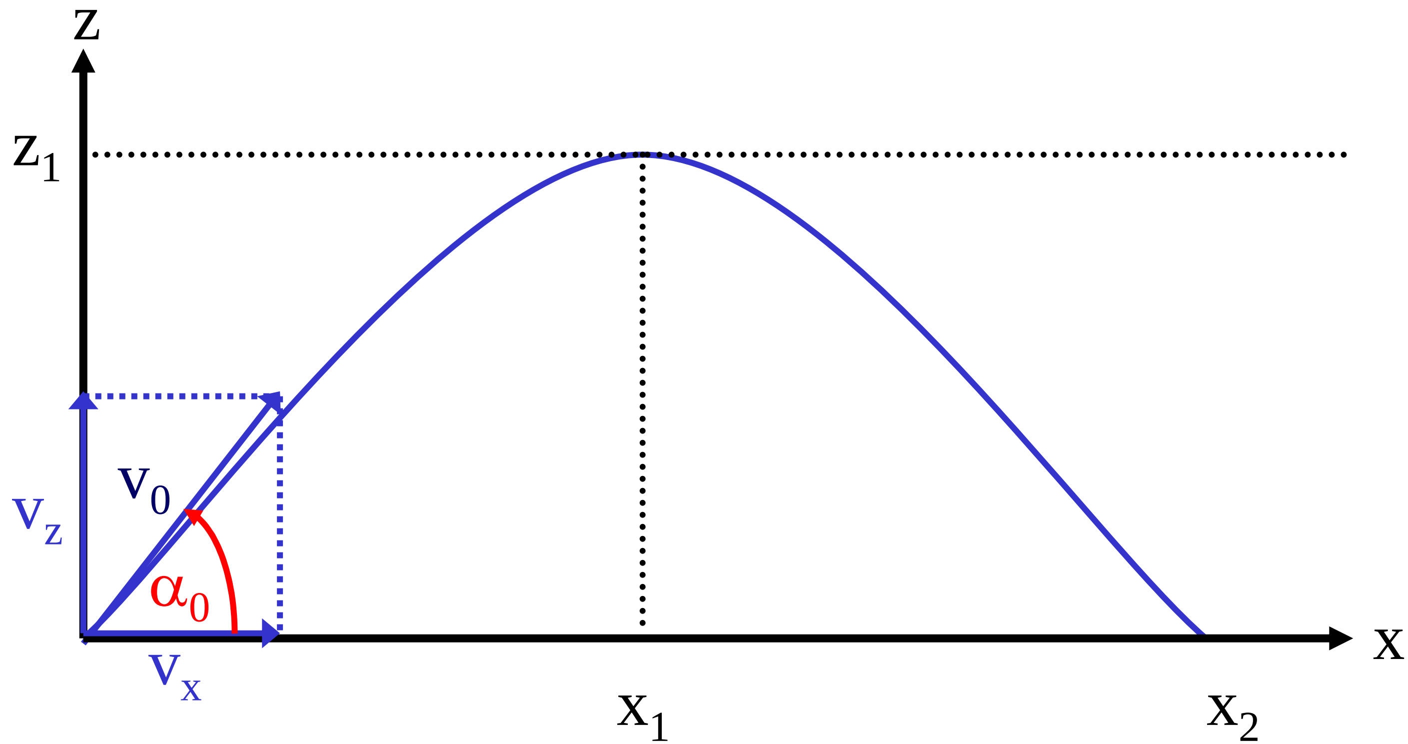
Nach (1.1-16) folgt

Fallgesetz:

$h = \frac{1}{2} at^2$

(1dim. => keine Vektorschreibweise nötig)

1.1.8 Der schiefe Wurf



- Aufteilung der Bewegung in Horizontal und Vertikalbewegung
- Gleichförmig in x-Richtung

$$r_x(t)=x(t)=v_0\cos(\alpha_0)t$$

- Gleichmässig beschleunigt in z (siehe 1.1-16)

$$r_z(t)=z(t)=v_0\sin(\alpha_0)t-(a/2)t^2$$

Gl. Wurfparabel $$\boxed{z(x)=x\tan(\alpha_0)-\frac{a}{2v_0^2\cos^2(\alpha_0)}x^2} \qquad (1.1\text{-}17)$$

Beispiel: Flohweitsprung

- Floh Sprungweite=0.35 m (= $2x_1$)
  Sprunghöhe=0.20 m (= z_1)
- Frage: Was war seine Anfangsgeschwindigkeit v_0?
  (Erdbeschleunigung sei a =9.81kg m/s²)

Lösung: Ort x_1 bei der z maximal (z_1). Dort dz/dx = 0

$$\boxed{x_1 = \frac{v_0^2}{a}\sin(\alpha_0)\cos(\alpha_0) \qquad z_1 = \frac{v_0^2}{2a}\sin^2(\alpha_0)} \quad (1.1\text{-}18a+b)$$

V_0 eliminieren und nach Anfangswinkel auflösen

$$z_1 = \frac{x_1}{2}\tan(\alpha_0) \Rightarrow \alpha_0 = \arctan\left(\frac{2z_1}{x_1}\right)$$

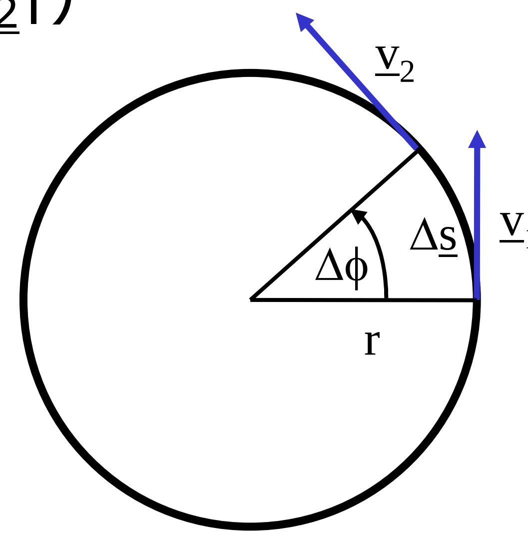
v_0 dann über (1.1-18b) berechnen $\quad v_0 = \sqrt{\frac{z_1 2a}{\sin^2(\alpha_0)}}$

Absprungwinkel: 66⁰ => v_0 = 2,2m/s =7,8km/h

1.1.9 Gleichförmige Kreisbewegung

- Bewegung auf einer Kreisbahn mit Konstante Geschwindigkeit $|\underline{v}|$ ($|\underline{v}_1|=|\underline{v}_2|$)

$$\boxed{\Delta s = r\Delta\phi} \qquad (1.1\text{-}19)$$



$\Delta\phi$ Bogenmaß (dimensionslos, „rad")

- Winkelgeschwindigkeit

$$\boxed{\omega = \Delta\phi / \Delta t} \qquad (1.1\text{-}20)$$

- Gesamtdrehwinkel

$$\boxed{\phi = \omega t} \qquad (1.1\text{-}21)$$

- Bahngeschwindigkeit

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}\cdot r = \omega \cdot r} \qquad (1.1\text{-}22)$$

(aus 1.1-19 & 1.1-20)

1.1.9 Gleichförmige Kreisbewegung (Fortsetzung)

- Vektorielle Betrachtung

$$\boxed{\vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (1.1\text{-}23)$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (1.1\text{-}24)$$

- Geschwindigkeit als Vektorprodukt

$$\boxed{\underline{v} = \underline{\omega} \mathrm{x} \underline{r}} \quad (1.1\text{-}25)$$

- Radialbeschleunigung

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = r \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot \vec{r}} \quad (1.1\text{-}26)$$

1.1.9 Gleichförmige Kreisbewegung (Fortsetzung)

- Ein Körper bewegt sich nur dann auf einer Kreisbahn, wenn er eine dem Betrage nach gleich bleibende, nach dem Mittelpunkt hin gerichtete Beschleunigung erfährt

1.1.10 Ungleichförmige Kreisbewegung

- Winkelgeschwindigkeit $\omega=\omega(t)$
- Winkelbeschleunigung $\boxed{\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}}$ (1.1-27)
- Tangentialbeschleunigung

$$\boxed{\underline{a}_t=\underline{\alpha}x\underline{r}} \quad (1.1\text{-}28)$$

1.2 Dynamik der Punktmasse

- Bisher (Kinematik) Frage nach dem „wie“ der Bewegung
- Die Dynamik fragt nach dem „warum“, d.h. nach den Ursachen von Beschleunigungen
- „Lehre von den Kräften“

1.2.1 Die Newtonschen Axiome

- **Lex prima: Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird seinen Zustand zu ändern. (Trägheitssatz)**

- Postuliert Beharrungsvermögen im natürlichen Zustand = Trägheit des Körpers

- Manchmal auch als „**Galileis Trägheitsgesetz**“ bezeichnet

1.2.1 Die Newtonschen Axiome

- Die Größe der Bewegung wird durch die Geschwindigkeit und die Menge der Materie (Masse) vereint gemessen

- Bewegungsgröße ist der **Impuls**

$$\boxed{\underline{p} = m \cdot \underline{v}} \qquad (1.2\text{-}1)$$

- Lex prima mathematisch

$\underline{p}$ = const „bei Abwesenheit von Kräften"

1.2.1 Die Newtonschen Axiome

- **Lex secunda: Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt. (Aktionsprinzip)**
- Lex secunda mathematisch

$$\boxed{\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{F}} \qquad (1.2\text{-}2)$$

- F: „fors“ (lat. Kraft)
- Für m = const.

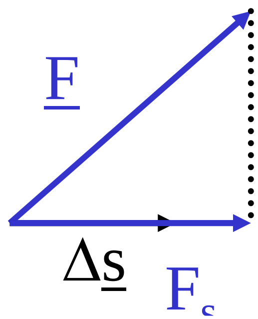
$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}} \qquad (1.2\text{-}3)$$

1.2.1 Die Newtonschen Axiome

- Einheit der Kraft: [F]=1 N (Newton) = 1 kg m/s²

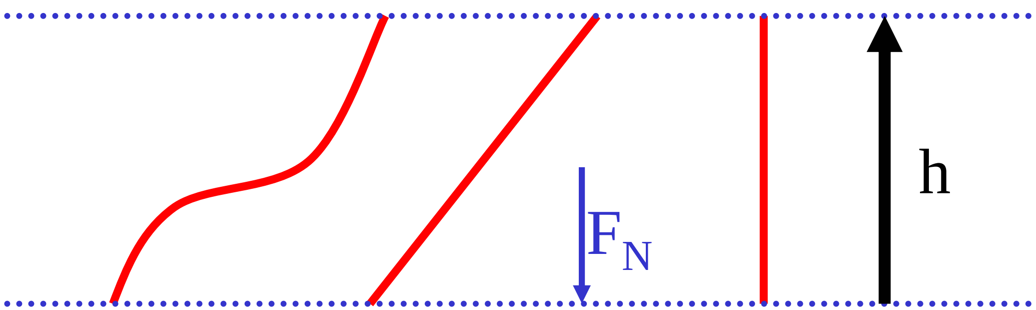
- Arbeit (differentiell)

$$\boxed{\Delta A = \underline{F}\cdot\Delta\underline{s} = F_s\cdot\Delta s} \quad (1.2\text{-}4)$$



- Arbeit

$$\boxed{A = \int \vec{F} d\vec{s}} \quad (1.2\text{-}5)$$



- Einheit der Arbeit

[A]=1 J (Joule) = 1 kg m²/s²

Auf allen Bahnkurven wird die gleiche Arbeit W=F·h verrichtet!

1.2.1 Die Newtonschen Axiome

- **Lex tertia: Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich und von entgegen gesetzter Richtung. (Reaktionsprinzip)**

- „actio =reactio“

- Bsp.: Der fallende Stein zieht die Erde genauso an wie die Erde den Stein

1.2.1 Die Newtonschen Axiome

- **Corollarium („Lex quarta“): Kräfte addieren sich wie Vektoren (Superpositionsprinzip)**

- Unabhängigkeit von Kraftwirkungen

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \ldots + \underline{F}_n = \underline{F}_{ges}$$

- Arbeiten addieren sich algebraisch

$$\underline{F}_1 \Delta \underline{s} + \underline{F}_2 \Delta \underline{s} + \underline{F}_3 \Delta \underline{s} + \ldots + \underline{F}_n \Delta \underline{s} =$$

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \ldots \Delta A_n = \Delta A_{ges}$$