

# Das Ziegenproblem

*Problem:* Bei einer Spielshow gibt es drei Tore. Hinter zwei Toren verbergen sich zwei Ziegen, hinter einem Tor ein Preis. Der Spielkandidat (SP) der Spielshow wählt ein Tor. Der Showmaster (SM) öffnet zufällig ein Ziegentor, und nie das Tor des SP oder das Tor mit dem Preis. Der SP erhält die Möglichkeit sein Wahl zu überdenken. Ist es nun für den SP besser, bei seiner ersten Wahl zu bleiben oder das Tor zu wechseln?

*Lösung:* Es ist besser, wenn der SP das Tor wechselt. *Beweis:* Seien  $A, B, C$  die drei Tore. Der Spieler wählt das Tor  $A$ . Der Showmaster hat nun verschiedene Möglichkeiten, ein Tor zu öffnen, je nach dem, wo sich der Preis befindet. Befindet sich der Preis hinter Tor  $A$ , so wird dieser Fall mit  $A_p$  bezeichnet; das Tor, das der SM öffnet wird mit Index  $o$  bezeichnet, also z.B.  $B_o$ . Für die verschiedenen Fälle das Tor  $B$  zu öffnen, gibt es nun verschiedene Wahrscheinlichkeiten:

- $p(B_o|A_p) = 1/2$
- $p(B_o|B_p) = 0$
- $p(B_o|C_p) = 1$

Mit dem *Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit* erhält man die Wahrscheinlichkeit  $p(B_o)$ :

$$p(B_o) = p(A_p) \times p(B_o|A_p) + p(B_p) \times p(B_o|B_p) + p(C_p) \times p(B_o|C_p)$$

mit  $p(A_p) = p(B_p) = p(C_p) = 1/3$  erhält man

$$p(B_o) = 1/2.$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass der Preis hinter dem Tor  $A$  ist, wenn der SM Tor  $B$  geöffnet hat, erhält man mit Bayescher Formel

$$p(A_p|B_o) = \frac{p(B_o|A_p) \times p(A_p)}{p(B_o)} = \frac{1/2 \times 1/3}{1/2} = 1/3$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass der Preis hinter dem Tor  $C$  ist, wenn der SM Tor  $B$  geöffnet hat, erhält man ebenfalls mit Bayescher Formel

$$p(C_p|B_o) = \frac{p(B_o|C_p) \times p(C_p)}{p(B_o)} = \frac{1 \times 1/3}{1/2} = 2/3$$

q.e.d.