Numerische Akustik

Ennes Sarradj, Gesellschaft für Akustikforschung Dresden mbH

1 Einleitung

Akustischen Messungen und Berechnungen sind mittlerweile in vielen Fällen nicht ohne Einsatz eines Computers vorstellbar. Aus diesem Grund existiert eine Vielzahl so genannter numerischer Verfahren, von denen im folgenden ein kleine Auswahl vorgestellt werden soll. Die Darstellung bleibt dabei auf Verfahren zur Berechnung von Schallfeldern beschränkt. Bild 1 zeigt die verallgemeinerte Aufgabenstellung für diesen Fall. In einem Gebiet, das auch unbeschränkt ausgedehnt sein kann, lasse sich die Physik der Schallausbreitung durch eine Differentialgleichung und durch Randbedingungen beschreiben (Bsp. siehe Bild 1). Aufgabe der Berechnung des Schallfeldes ist es, eine Funktion f zu finden, die sowohl die Differentialgleichung erfüllt als auch den Randbedingungen genügt (Randwertproblem). Zur Lösung lassen sich prinzipiell folgende zwei Wege gehen:

analytisch: *exakte* Lösung des Randwertproblems:

- nur möglich, wenn der Typ der Funktion f bekannt ist (z.B. bei einfachen Geometrien wie Rechteck und Kreis)
- für praktische Anwendungen meist nicht möglich

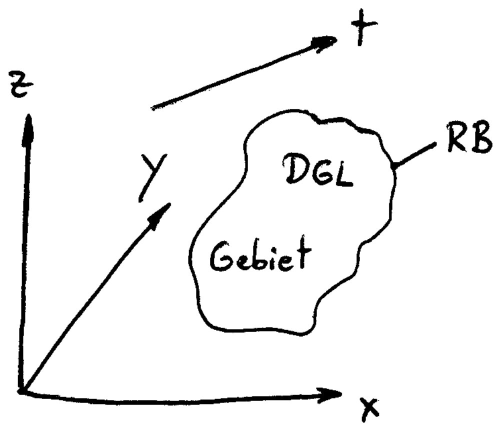
numerisch: *näherungsweise* Lösung des Randwertproblems:

- Überführung analytischer Ausdrücke und Zusammenhänge (Ableitungen, Integrale, Differentialgleichungen, ...) in algebraische (Addition, Multiplikation, Gleichungen, ...)
- Lösung algebraischer Gleichungen führt auf Näherungslösung für gesuchte Funktion f

Die Näherungslösung für f wird dabei durch einzelne Funktionswerte gegeben, die an Stützstellen (*Knoten*) berechnet werden. Alle Knoten zusammen bilden ein *Gitter*, mit dem das gesamte Gebiet bzw. nur ein bestimmter Teil davon versehen wird. Somit ergibt sich eine Diskretisierung von f und damit auch eine veränderte Aufgabenstellung. An Stelle der Funktion f sind nun einzelne Funktionswerte gesucht.

Prinzipiell bieten sich folgende Möglichkeiten für den Übergang von Analysis zu Algebra:

1. numerische Differentiation:



Beispiel:
DGL: akustische Wellengleichung

$$\Delta p + k^2 p = 0$$

RB: „schallharter“ Rand

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$$

Bild 1: verallgemeinerte Aufgabenstellung bei der Feldberechnung

- alle Ableitungen werden durch Differenzenquotienten ersetzt
- Differentialgleichung wird zur Gleichung
- Gebiet wird mit einem regelmäßigen (strukturierten) Gitter versehen
- Werte von f an den Gitterknoten werden als Lösung eines Gleichungssystems erhalten
- Bsp.: Finite-Differenzen-Methode (FDM)

2. numerische Integration:
    - Differentialgleichung und Randbedingungen werden in Gleichungen umgewandelt, die bestimmte Integrale enthalten (Integralgleichungen)
    - (auch unregelmäßiges) Gitter im Gebiet oder auf Teilen davon
    - Integrale werden durch Summen über Funktionswerte von f in den Gitterpunkten angenähert
    - Werte von f an den Gitterknoten werden als Lösung eines Gleichungssystems erhalten
    - Bsp.: Finite-Elemente-Methode (FEM), Randelemente-Methode (BEM)

Nicht jedes Verfahren ist für jedes Problem einsetzbar. Welches numerische Verfahren für eine bestimmte Aufgabenstellung zu Einsatz kommt, hängt darüber hinaus auch davon ab, welcher Aufwand mit der Berechnung verbunden ist.

Zwei Verfahren, die für Akustik von besonderer Bedeutung sind, werden im folgenden vorgestellt.

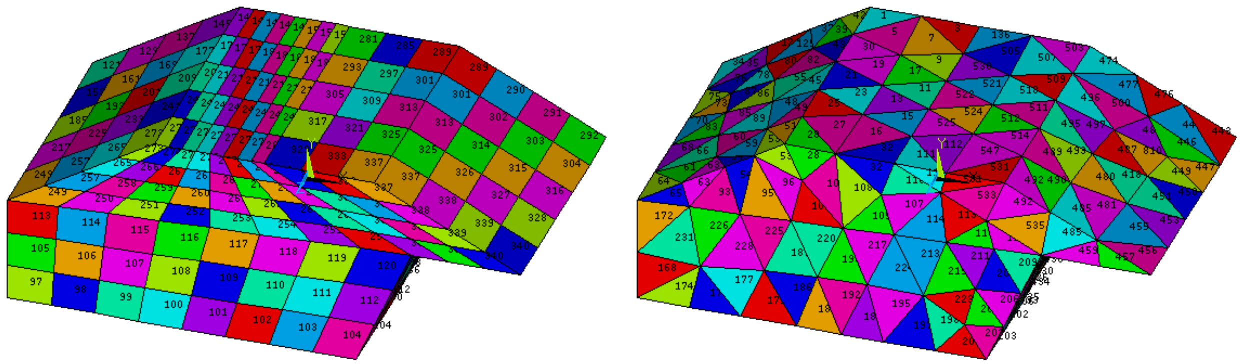


Bild 2: Zwei mögliche FEM-Berechnungsgitter zur Berechnung des Schallfeldes in einem vereinfachten Pkw-Innenraum. Links: Hexaeder-Elemente, Rechts: Tetraeder-Elemente

2 Finite-Elemente-Methode(FEM)

Bei der FEM wird das Gebiet durch das Gitter in einzelne Teilgebiete, die finiten Elemente, zerlegt (Beispiele siehe Bild 2). Die gesuchte Funktion, z.B. die Schalldruckverteilung $p(\mathbf{x})$ wird durch Interpolation angenähert und durch die (unbekannten) Werte p_i in den zum Element gehörenden Knoten ausgedrückt:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_i N_i(\mathbf{x}) p_i = \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}. \tag{1}$$

Die Interpolationsfunktionen N_i sind die so genannten Formfunktionen, z.B. lineare Funktionen, die so gewählt werden, dass sie jeweils nur in einem Knoten den Wert 1 haben und in allen anderen Knoten verschwinden.

Der nächste Schritt ist die Umformung der Differentialgleichung in eine Integralgleichung, hier am Beispiel der akustischen Wellengleichung (in komplexer Schreibweise):

$$\Delta p + k^2 p = 0. \tag{2}$$

Zunächst wird mit einer beliebigen (beschränkten) Hilfsfunktion w multipliziert und dann über das Elementvolumen integriert:

$$\int_V w \left(\Delta p + k^2 p\right) dV = 0 \tag{3}$$

Anschließend wird die erste Greensche Formel zur Umformung dieses Integrals angewendet und außerdem die in (1) angegebene Interpolation für p und ebenso für w eingeführt, so dass sich:

$$\int_V \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \nabla \mathbf{N} \nabla \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{p} - k^2 \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \mathbf{N} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{p} dV = \int_S \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \mathbf{N} \nabla \mathbf{p} d\overrightarrow{n} \tag{4}$$

ergibt. Nun kann die Hilfsfunktion wieder entfernt werden:

$$\left(\int_V \nabla\mathbf{N}\nabla\mathbf{N}^{\mathrm{T}} dV - k^2 \int_V \mathbf{N}\mathbf{N}^{\mathrm{T}} dV\right)\mathbf{p} = \int_S \mathbf{N}\nabla\mathbf{p}\, d\overrightarrow{n} \tag{5}$$

Damit ist ein Gleichungsystem für $\mathbf{p}$ (enthält die Knotenwerte p_i) aufgestellt. Die auftretenden Integrale, die nur die Formfunktionen und deren Ableitungen enthalten, werden numerisch berechnet. Die rechte Seite ist als Randbedingung nutzbar und der auftretende Ausdruck $\nabla\mathbf{p}$ muss nicht ausgerechnet werden. Da (5) jeweils nur innerhalb eines Elementes gilt, wird die rechte Seite zur Verknüpfung des Gleichungsystems mit dem anderer Elemente genutzt (Die Details dazu sind hier fortgelassen). Somit entsteht ein großes Gleichungssystem, dass gelöst werden kann. Dabei sind in der Akustik prinzipiell zwei Fälle zu unterscheiden:

- keine Berücksichtigung äußerer Anregung: Eigenfrequenzen (Resonanzen) und zugehörige Schwingungszustände werden berechnet (Modalanalyse, Bild 3)
- mit Berücksichtigung äußerer Anregung: Schallfeld infolge einer oder mehrerer Quellen wird berechnet (harmonische bzw. transiente Analyse, Bild 4)

Damit die mit der FEM erhaltene Näherungslösung noch brauchbar ist, dürfen die Elemente nicht zu groß gegenüber der Schallwellenlänge sein. Als Faustregel gilt, dass mindestens 6 Elemente pro Wellenlänge vorgesehen werden müssen. Mit steigender Frequenz bzw. größeren Abmessungen des Berechnungsgebietes steigt der Aufwand stark an und wird bald nicht mehr beherrschbar. Derzeit ist die Behandlung von Problemen mit etwa 10^7 Unbekannten auf größeren Rechnern möglich. Übliche Rechenzeiten liegen für praktische Probleme dabei im Bereich von vielen Stunden bis zu einigen Tagen.

Der für die Akustik wichtige Fall der Schallausbreitung über große Entfernungen (viele Wellenlängen bzw. bis ins Unendliche) ist nicht ohne weiteres mit der FEM zu behandeln, da das gesamte Gebiet mit einem Rechengitter versehen werden müsste und die Anzahl der Unbekannten viel zu groß werden würde. Eine Alternative bietet das im folgenden Abschnitt beschriebene Verfahren.

3 Randelemente-Methode (Boundary Element Method, BEM)

Zum Verständnis der diesem Verfahre zugrunde liegenden Idee sei noch einmal die allgemeine Aufgabenstellung nach Bild 1 betrachtet. Oft genügt es, die gesuchte Funktion f (z.B. Schalldruckverteilung $\mathbf{p}$) nur in einem Teil des Gebietes zu kennen. In diesem Fall reicht es aus, f nur auf dem Rand des Gebietes zu bestimmen und daraus dann die gesuchten Funktionswerte im Innern des Gebietes zu berechnen.

Ausgangspunkt für ein solches Verfahren ist eine Integralgleichung der Akustik, die so genannte Kirchhoff-Helmholtz-Integralgleichung (KHI). Sie besagt, dass der Schalldruck an einem Punkt $\overrightarrow{Y}$ innerhalb, auf dem Rand und außerhalb des Gebietes V bestimmt werden kann, wenn

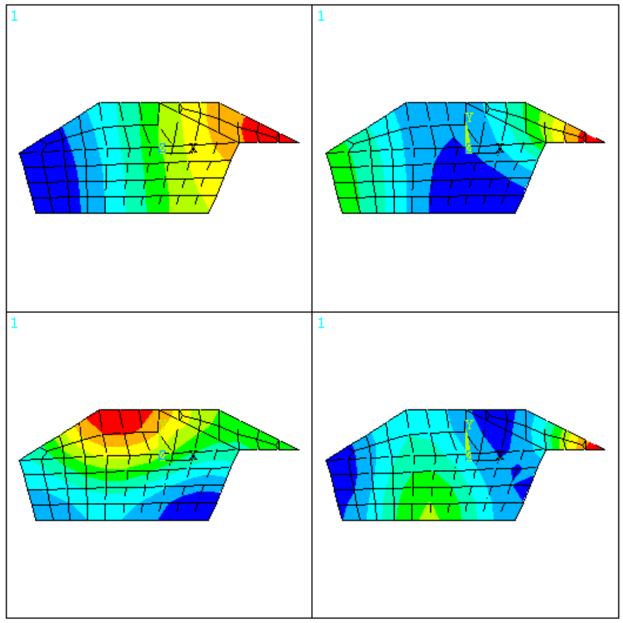


Bild 3: Ergebnisse einer Modalanalyse eines Pkw-Innenraums: Schalldruckverteilungen bei vier verschiedenen Eigenfrequenzen

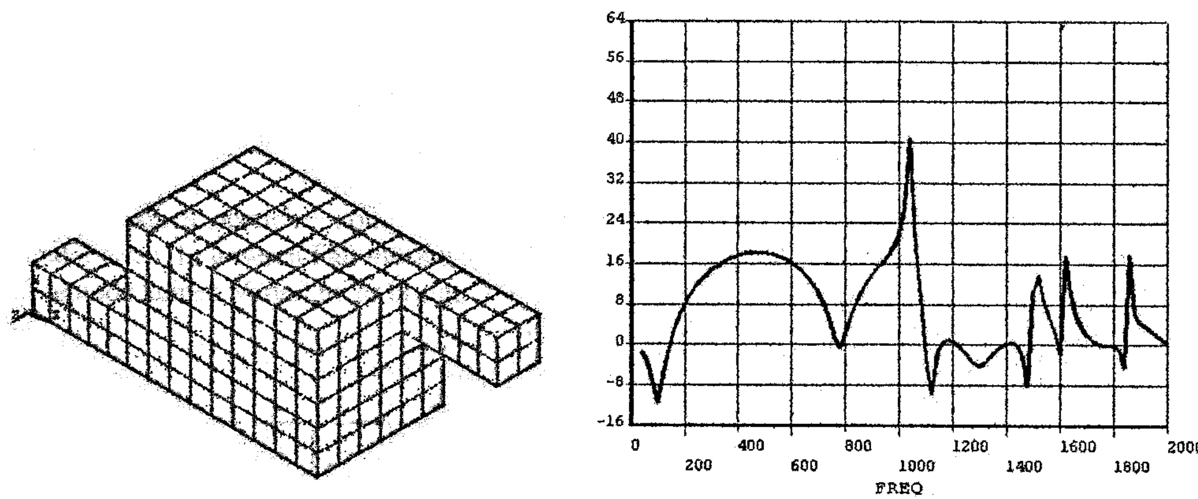


Bild 4: Berechnung des Übertragungsverhaltens eines Schalldämpfers Links: verwendetes Berechnungsgitter, Rechts: Übertragungsmaß in dB als Ergebnis einer harmonischen Analyse

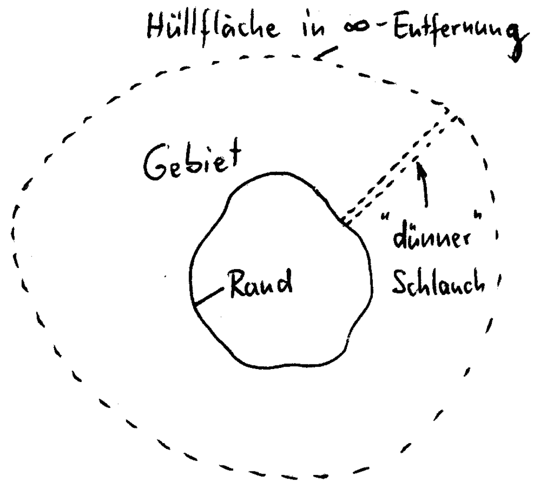


Bild 5: Außenraumproblem: Durch einen dünnen Schlauch und eine Hüllfläche in unendlicher Entfernung wird das außerhalb des Randes liegende Gebiet zu einem innerhalb des Randes liegenden

die Schalldruckverteilung (1.Term) und die Normalenableitung des Schalldrucks (=Schallschnelle, 2.Term) auf dem Rand des Gebietes S bekannt sind:

$$\int_S \left(p(\overrightarrow{X}) \frac{\partial G(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})}{\partial \overrightarrow{n}} - G(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) \frac{\partial p(\overrightarrow{X})}{\partial \overrightarrow{n}} \right) dS(\overrightarrow{X}) = p(\overrightarrow{Y}) \cdot \begin{cases} 0, & \overrightarrow{Y} \notin V; \\ \frac{1}{2}, & \overrightarrow{Y} \in S; \\ 1, & \overrightarrow{Y} \in V \cap \overrightarrow{Y} \notin S. \end{cases} \tag{6}$$

G ist die Greensche Funktion der akustischen Wellengleichung (für den dreidimensionalen Fall: $\mathrm{e}^{-jkr}/4\pi r$).

Bevor aber die Gleichung zur Berechung des gesuchten Schalldrucks verwendet werden kann, müssen der Schalldruck und die Schallschnelle auf dem Rand bekannt sein.

Liegt auch der Punkt $\overrightarrow{Y}$ auf dem Rand, so taucht der gesuchte Schalldruck auf dem Rand auf beiden Seiten der Integralgleichung auf. Wird nun der Rand ähnlich wie bei der FEM in einzelne Knoten und (Rand-)Elemente zerlegt und p mit Hilfe von Formfunktionen interpoliert, dann kann das Integral als Summe ausgedrückt werden. Der Schalldruck an einem bestimmten Randpunkt(=Knoten) ergibt sich dann aus der Summe, in der die Schalldrücke und Schallschnellen an allen anderen Knoten enthalten sind. Werden so alle N Knoten betrachtet ergibt sich ein Gleichungsystem, das N Gleichungen und $2N$ Unbekannte enthält, nämlich p und $\partial p/\partial \overrightarrow{n}$ an allen Knoten. Mit Hilfe von N Randbedingungen für p oder $\partial p/\partial \overrightarrow{n}$ erhält man die fehlenden N Gleichungen und kann das Gleichungsystem und damit die gestellte Berechnungsaufgabe lösen.

Mit einem kleinen gedanklichen Trick kann man sich klar machen, dass das Verfahren auch funktioniert, wenn das Gebiet *außerhalb* des Randes liegt (Aussenraum-Problem, Bild 5). Dazu wird der Rand um einen kleinen, dünnen Schlauch mit vernachlässigbar kleiner Oberfläche mit einer zweiten Berandung verbunden, die sich unendlich weit weg befindet. Somit befindet sich das Gebiet innerhalb des so neu definierten Randes, jedoch tragen Schlauch als auch unendlich weit entfernte Oberfläche nichts zum Integral in (6) bei.

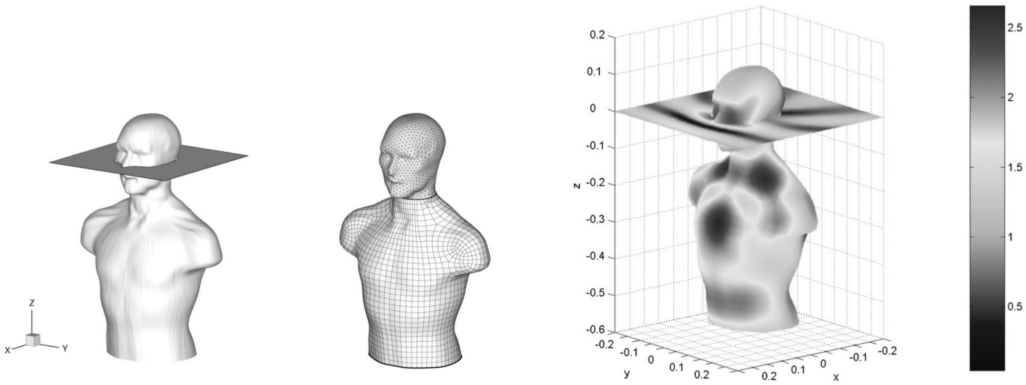


Bild 6: Frontaler Einfall einer ebenen Schallwelle auf ein Modell eines menschlichen Kopfes und Torso. Links: verwendetes Modell und Visualisierungsfläche, Mitte: Berechnungsgitter, Rechts: berechnete Schalldruckverteilung bei 1600 Hz (Quelle: Jan Rejlek „Modellierung der Schallstreuung mit Hilfe der Randelementemethode“ Diplomarbeit CVUT Praha 2004)

Besonders die Möglichkeit, Schallfelder außerhalb einer Randfläche mit beherrschbarem Aufwand zu berechnen, macht die BEM zu einem attraktiven Werkzeug der Akustik. Ein Beispiel zeigt Bild 6, wo die Schalldruckverteilung an einem Torso mit Kopf berechnet wurde.

Bei der BEM müssen deutlich weniger Unbekannte bestimmt werden als bei der FEM. Allerdings ist der Aufwand zur Lösung des Gleichungssystem höher. Deshalb sind nur etwa 10^5 Unbekannte praktisch beherrschbar. Um die Vorteile beider Verfahren zu nutzen, lassen sich FEM und BEM auch gekoppelt anwenden.