

Numerik?

Finite Differenzen - . . .

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM- . . .

Numerische Methoden in der Akustik

Prof.Dr.-Ing. Matthias Blau
Institut für Hörtechnik und Audiologie
FH Oldenburg/Ostfriesland/Wilhelmshaven

XXI. Winterschule der Deutschen Gesellschaft für Medizinische Physik
Pichl 2009

Übersicht

Numerik?

Finite Differenzen - ...

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM-...

1. Numerik?
2. Finite Differenzen - TLM
3. Finite Elemente - FEM
4. Randelemente - BEM
5. Vergleich TLM-FEM-BEM

1. Numerik?

Numerik?

Finite Differenzen - . . .

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM- . . .

- Motivation: Schallfelder können nur für “akademische” Spezialfälle analytisch berechnet werden ■
- Problemstellung: Lösung der Wellengleichung

$$\Delta p(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

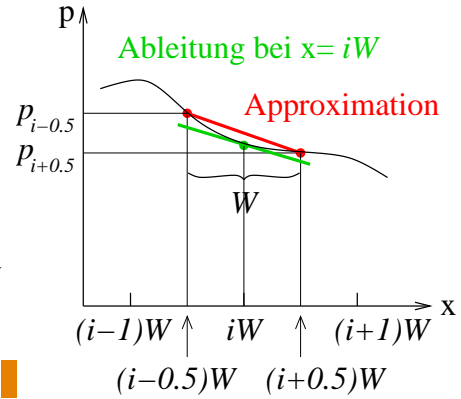
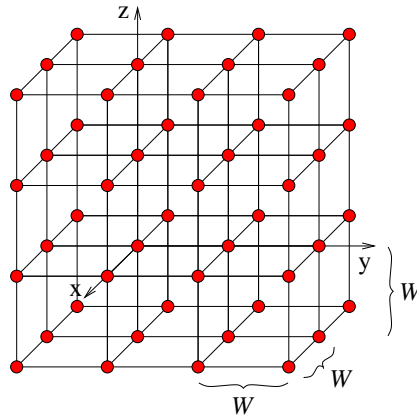
(d.h. Berechnung von $p(\vec{r}, t)$) für interessierende Punkte \vec{r} unter gegebenen Randbedingungen ■

- Randbedingungen
 - vorgegebener Druck
 - vorgegebene Normalenschnelle $v_n \propto \partial p / \partial \vec{n}$
 - vorgegebene (spezifische) Impedanz

2. Finite Differenzen - TLM

- Idee

- Approximation der Differenzialquotienten durch Differenzenquotienten ■
- z.B. in kartesischen Koordinaten



$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i,j,k} (n) \approx \frac{1}{W} \{ p_{i+0.5,j,k}(n) - p_{i-0.5,j,k}(n) \}$$

- Numerik?
- Finite Differenzen - ...
- Finite Elemente
- Randelemente
- Vergleich TLM-...

2. Finite Differenzen - TLM

- Idee (cont'd)

- zweite Ableitungen

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|_{i,j,k} (n) = \left. \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} \right|_{i,j,k} (n)$$

$$\approx \frac{1}{W} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{i+0.5,j,k} (n) - \frac{1}{W} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{i-0.5,j,k} (n)$$

$$\approx \frac{1}{W^2} \{ p_{i+1,j,k}(n) - p_{i,j,k}(n) \}$$

$$- \frac{1}{W^2} \{ p_{i,j,k}(n) - p_{i-1,j,k}(n) \}$$

$$= \frac{1}{W^2} \{ p_{i+1,j,k}(n) - 2p_{i,j,k}(n) + p_{i-1,j,k}(n) \}$$

analog wird für Ableitungen nach y, z, t verfahren

2. Finite Differenzen - TLM

- Idee (cont'd)

- eingesetzt in Wellengleichung

$$\frac{1}{W^2} \left\{ \sum_{l=1}^6 p_{l\text{ter Nachbar}}(n) - 6p_{i,j,k}(n) \right\} - \frac{1}{c^2 T^2} \left\{ p_{i,j,k}(n+1) - 2p_{i,j,k}(n)p_{i,j,k}(n-1) \right\} = 0$$

- “Finite Difference Time Domain” (FDTD) ■

- Stabilitätsbedingung: $W/T \geq \sqrt{d}c$
(d... Anzahl der Dimensionen)

2. Finite Differenzen - TLM

- Idee (cont'd)

- besonders einfach wird es, wenn $W/T = \sqrt{d}c$
(CFL-Grenze) ■

$$p_{i,j,k}(n+1) = \frac{1}{d} \sum_{l=1}^{2d} p_{l\text{ter Nachbar}}(n) - p_{i,j,k}(n-1)$$

- “Transmission Line Matrix” (TLM) ■
- 2D-Version zum Ausprobieren:
www.hoertechnik-audiologie.de/downloads/Lambda

2. Finite Differenzen - TLM

- Grenzen/Probleme

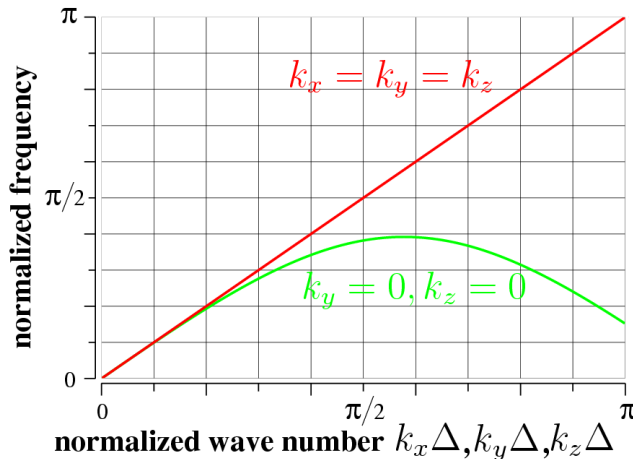
- Dispersion: z.B. 3D-Formulierung

$$p_{i,j,k}(n+1) = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^6 p_{l\text{ter Nachbar}}(n) - p_{i,j,k}(n-1)$$

bedeutet $\cos(\omega/F_s) = \frac{1}{3} \cos(\sqrt{3} k_x \Delta)$

$$+ \frac{1}{3} \cos(\sqrt{3} k_y \Delta)$$

$$+ \frac{1}{3} \cos(\sqrt{3} k_z \Delta)$$



→ c abseits der Diagonalen geringer

→ Vermeidung:
 $\Delta \leq \lambda/10$

Numerik?

Finite Differenzen - ...

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM-...

2. Finite Differenzen - TLM

- Randbedingungen in TLM ■
 - Druck: einfach (es wird mit dem Druck gerechnet!) ■
 - Schnelle: schwierig (Schnelle muss aus Druckgradienten berechnet werden) ■
 - Impedanz: Umwandlung in Reflexionsfaktoren

Numerik?

Finite Differenzen - . . .

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM- . . .

2. Finite Differenzen - TLM

- praktische Benutzung

- creating *.sim file – Scilab example

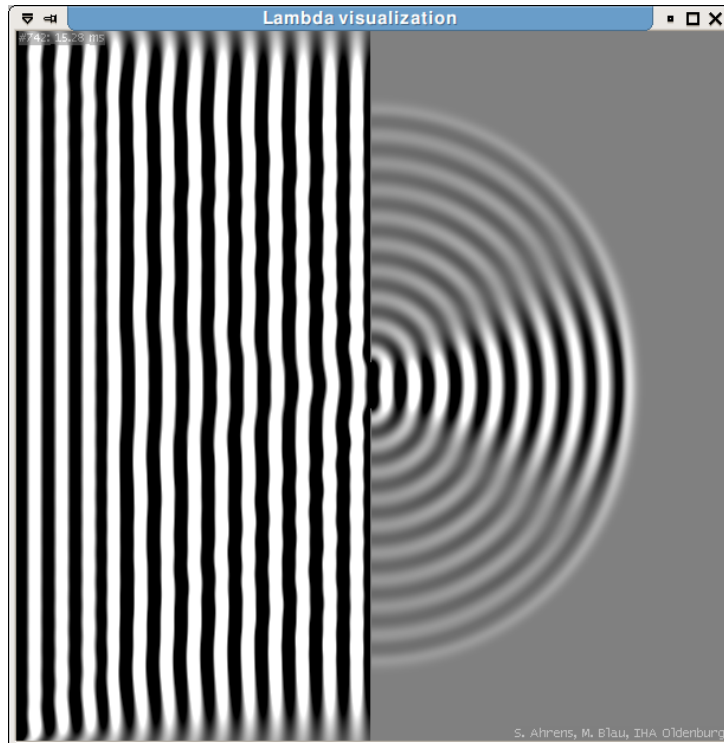
```

1 ysize=600; xsize=600; steps=0; c=343; w=0.01;
2 env=zeros(ysize,xsize);
3 env(320:600,300)=1; env(1:280,300)=1; // rigid walls (r=1)
4
5 sources=[];
6 for q=1:ysize
7 sources=[sources q 1 1 1 1500 0]; // x=q, y=1, sine, ampl=1,
8                                     // f=1500Hz, phase=0°
9 end
8
9 filename='example.sim';
10 simFile = mopen(filename,'wb');
11 mput([ysize xsize steps c w], 'dl',simFile);
12 mput(env.', 'dl',simFile);
13 mput(sources, 'dl',simFile);
14 mclose(simFile); // Done.

```

2. Finite Differenzen - TLM

– Ergebnis



Numerik?

Finite Differenzen - . . .

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM- . . .

3. Finite Elemente

- Numerik?
- Finite Differenzen - . . .
- Finite Elemente**
- Randelemente
- Vergleich TLM- . . .

- Idee: Überführen der Helmholtzgleichung in Integralform, Lösen der Integrale für räumlich begrenzte Elemente (Approximation der Ortsabhängigkeit des Schalldrucks) und Zusammenführung der Lösungen der Einzelemente zu einem globalen Gleichungssystem ■
- Vorgehensweise ■
 1. Integralform der Helmholtzgleichung ■
 2. Reduzierung der Ordnung der Ortsableitungen ■
 3. FE-Approximation (Knoten, Formfunktionen) ■
 4. Integration innerhalb der einzelnen Elemente ■
 5. Zusammenführen der Elementgleichungen zu einem globalen Gleichungssystem ■
 6. Randbedingungen berücksichtigen ■
 7. globales Gleichungssystem lösen

3. Finite Elemente

- Beispiel 1D ■

1. Integralform der Helmholtzgleichung

$$\frac{d^2 \hat{p}}{dx^2} + k^2 \hat{p} = 0 \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\int_0^L \left(w \frac{d^2 \hat{p}}{dx^2} + w k^2 \hat{p} \right) dx = 0 \quad \text{“gewichtete Residuen”}$$

(Wichtungsfunktion w)

Numerik?

Finite Differenzen - ...

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM-...

3. Finite Elemente

- Beispiel 1D (cont'd)
 2. Reduzierung der Ordnung der Ortsableitungen durch partielle Integration ■

$$f = w, \quad g = \frac{d\hat{p}}{dx}, \quad \int_0^L f \frac{dg}{dx} dx = fg \Big|_0^L - \int_0^L \frac{df}{dx} g dx \quad \blacksquare$$

also

$$w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{d\hat{p}}{dx} dx + \int_0^L w k^2 \hat{p} dx = 0 \quad \blacksquare$$

oder

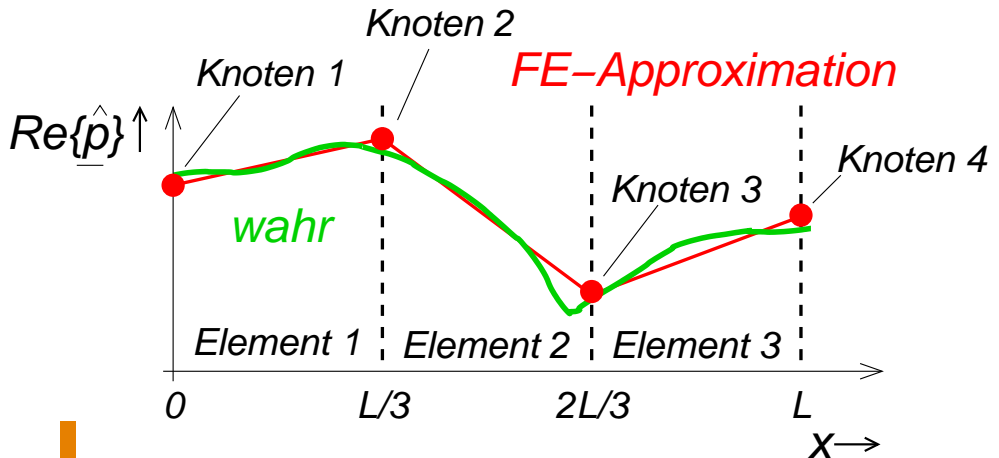
$$\int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{d\hat{p}}{dx} dx - k^2 \int_0^L w \hat{p} dx = w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_0^L \quad \blacksquare$$

→ nur noch 1. Ableitungen nach x !

3. Finite Elemente

- Beispiel 1D (cont'd)

3. FE-Approximation, Knoten, Formfunktionen



■ lineare Formfunktionen

$$\hat{p}_{\text{innerhalb Element}} \approx \hat{p}_{\text{links}} (1 - \xi) + \hat{p}_{\text{rechts}} \xi$$

$\xi \dots$ lokale Elementkoordinate $0 \leq \xi \leq 1$

Numerik?

Finite Differenzen - ...

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM-...

3. Finite Elemente

- Beispiel 1D (cont'd)

3. weiter mit Formfunktionen



$$\begin{aligned} \hat{p}_{\text{innerhalb Element}} &\approx \hat{p}_{\text{links}} (1 - \xi) + \hat{p}_{\text{rechts}} \xi \\ &= \begin{bmatrix} (1 - \xi) & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_{\text{links}} \\ \hat{p}_{\text{rechts}} \end{bmatrix} \\ &= \vec{\varphi}^T \vec{p} \end{aligned}$$

GALERKIN-Ansatz (1915): $w = \vec{\varphi}$

3. Finite Elemente

- Beispiel 1D (cont'd)

4. Integration innerhalb der Elemente

$$\int_{x_1}^{x_2} \{ \cdot \} dx = \int_0^1 \{ \cdot \} J d\xi \quad \text{mit } J = \left| \frac{dx}{d\xi} \right|$$

im Beispiel sind $x = \xi/3$ und $dx/d\xi = 1/3$.

Für jedes Element gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{d\underline{\hat{p}}}{d\xi} J d\xi - k^2 \int_0^1 w \underline{\hat{p}} J d\xi \\ & \approx \int_0^1 \frac{d\vec{\varphi}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{d\vec{\varphi}^T}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \vec{p} J d\xi - k^2 \int_0^1 \vec{\varphi} \vec{\varphi}^T \vec{p} J d\xi \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}^{(\text{Element})} \vec{p} - k^2 \mathbf{M}^{(\text{Element})} \vec{p}$$

3. Finite Elemente

- Beispiel 1D (cont'd)

4. weiter mit der Integration innerhalb der Elemente

$$\mathbf{K}^{(\text{Element})} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \left(\frac{d\varphi_1}{d\xi}\right)^2 \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 J d\xi & \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{d\xi} \frac{d\varphi_2}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 J d\xi \\ \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{d\xi} \frac{d\varphi_1}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 J d\xi & \int_0^1 \left(\frac{d\varphi_2}{d\xi}\right)^2 \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 J d\xi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{(\text{Element})} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1^2 J d\xi & \int_0^1 \varphi_1 \varphi_2 J d\xi \\ \int_0^1 \varphi_2 \varphi_1 J d\xi & \int_0^1 \varphi_2^2 J d\xi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/9 & 1/18 \\ 1/18 & 1/9 \end{pmatrix}$$

3. Finite Elemente

- Beispiel 1D (cont'd)

5. lokal → global

Erinnerung:

$$\int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{d\hat{p}}{dx} dx - k^2 \int_0^L w \hat{p} dx = w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_0^L$$

a) linke Seite:

$$\int_0^L \{ \cdot \} dx = \int_{(E1)} \{ \cdot \} dx + \int_{(E2)} \{ \cdot \} dx + \int_{(E3)} \{ \cdot \} dx$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{K}^{(E1)} \vec{p}^{(E1)} - k^2 \mathbf{M}^{(E1)} \vec{p}^{(E1)} \\ &\quad + \mathbf{K}^{(E2)} \vec{p}^{(E2)} - k^2 \mathbf{M}^{(E2)} \vec{p}^{(E2)} \\ &\quad + \mathbf{K}^{(E3)} \vec{p}^{(E3)} - k^2 \mathbf{M}^{(E3)} \vec{p}^{(E3)} \end{aligned}$$

3. Finite Elemente

- Beispiel 1D (cont'd)

5. weiter mit linker Seite

$$\int_0^L \{ \cdot \} dx = (\mathbf{K}^{(\text{global})} - k^2 \mathbf{M}^{(\text{global})}) \begin{pmatrix} \hat{p}_{K1} \\ \hat{p}_{K2} \\ \hat{p}_{K3} \\ \hat{p}_{K4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(\text{global})} = \begin{pmatrix} k_{11}^{(E1)} & k_{12}^{(E1)} & & \\ k_{21}^{(E1)} & k_{22}^{(E1)} + k_{11}^{(E2)} & k_{12}^{(E2)} & \\ & k_{21}^{(E2)} & k_{22}^{(E2)} + k_{11}^{(E3)} & k_{12}^{(E3)} \\ & & k_{21}^{(E3)} & k_{22}^{(E3)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{(\text{global})} = \begin{pmatrix} m_{11}^{(E1)} & m_{12}^{(E1)} & & \\ m_{21}^{(E1)} & m_{22}^{(E1)} + m_{11}^{(E2)} & m_{12}^{(E2)} & \\ & m_{21}^{(E2)} & m_{22}^{(E2)} + m_{11}^{(E3)} & m_{12}^{(E3)} \\ & & m_{21}^{(E3)} & m_{22}^{(E3)} \end{pmatrix}$$

Numerik?

Finite Differenzen - ...

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM-...

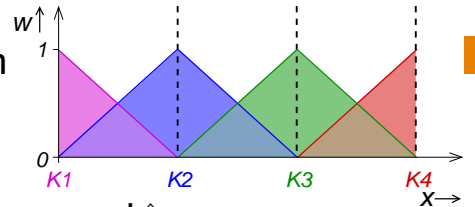
3. Finite Elemente

- Beispiel 1D (cont'd)

5. weiter mit rechter Seite

$$w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_0^L = w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_{x=L} - w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_{x=0}$$

globale Gewichtsfunktionen



Knoten 1: $w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_{x=L} = 0, \quad w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_{x=0} = -j\omega \rho \hat{v}_{x,K1}$

Knoten 2,3: $w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_{x=L} = 0, \quad w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_{x=0} = 0$

Knoten 4: $w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_{x=L} = -j\omega \rho \hat{v}_{x,K4}, \quad w \frac{d\hat{p}}{dx} \Big|_{x=0} = 0$

3. Finite Elemente

- Beispiel 1D (cont'd)

5. globales Gleichungssystem

$$(\mathbf{K}^{(\text{global})} - k^2 \mathbf{M}^{(\text{global})}) \begin{pmatrix} \hat{p}_{K1} \\ \hat{p}_{K2} \\ \hat{p}_{K3} \\ \hat{p}_{K4} \end{pmatrix} = -j\omega \varrho \begin{pmatrix} -\hat{v}_{x,K1} \\ 0 \\ 0 \\ \hat{v}_{x,K4} \end{pmatrix}$$

Numerik?

Finite Differenzen - ...

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM-...

3. Finite Elemente

- Beispiel 1D (cont'd)

5. Randbedingungen

– Schnellen v_{boundary}

$$\left(\mathbf{K}^{(\text{global})} - k^2 \mathbf{M}^{(\text{global})} \right) (\vec{p}) = -j\omega \rho_- (\vec{v}_{\text{boundary}})$$

– Drücke p_{boundary}

$$\left(\mathbf{K}^{(\text{global})} - k^2 \mathbf{M}^{(\text{global})} \right) \begin{pmatrix} \vec{p}_{\text{boundary}} \\ \vec{p}_{\text{gesucht}} \end{pmatrix} = \vec{0}$$



$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \rightarrow A_{22} \vec{p}_{\text{gesucht}} = -A_{21} \vec{p}_{\text{boundary}}$$

– Impedanzen: häufig nicht implementiert, aber möglich

3. Finite Elemente

- praktische Benutzung ■
 - Ablauf
 1. Preprocessing: Geometrieimport, Vernetzung, Materialkenngrößen (ρ , c), Randbedingungen ■
 2. Lösung: pro interessierender Frequenz Knotendrucke berechnen ■
 3. Postprocessing: Ausgabe bzw. grafische Darstellung ■
 - zum Ausprobieren: www.csc.fi/english/pages/elmer

Numerik?

Finite Differenzen - . . .

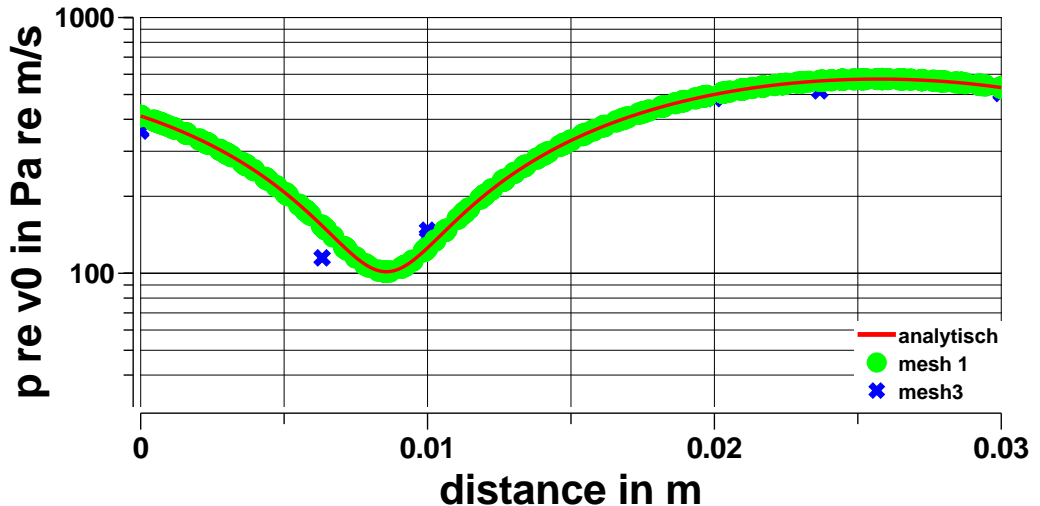
Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM- . . .

3. Finite Elemente

- Beispiel 2D: schallhartes Rohr, $L = 30$ mm, $d = 8$ mm
 - Frequenz $f = 5$ kHz
 - links mit Schnelle v_0 angeregt
 - rechts mit $r = 0.7 e^{j\pi/4}$ abgeschlossen



Numerik?

Finite Differenzen -...

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM-...

4. Randelemente

- Idee (Innenraumproblem): Benutzung der partikulären Lösung $G(\vec{r} - \vec{r}_0)$ der Helmholtzgleichung für das freie Schallfeld eines Punktstrahlers bei $\vec{r} = \vec{r}_0$ führt zur **KIRCHHOFF-HELMHOLTZ-Integralgleichung**

$$\begin{aligned} \oiint_S \left(\hat{p}(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\partial \vec{n}} - G(\vec{r} - \vec{r}_0) \frac{\partial \hat{p}(\vec{r})}{\partial \vec{n}} \right) d\vec{S} \\ = \iiint_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV \end{aligned}$$

mit der GREENSchen Funktion für das freie Schallfeld in 3D

$$G(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

4. Randelemente

- Idee (cont'd)

- rechte Seite hängt davon ab, ob \vec{r}_0 innerhalb V , außerhalb V oder auf dem Rand liegt

$$\iiint_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \hat{p}(\vec{r}_0) C(\vec{r}_0)$$

$$\text{mit } C(\vec{r}_0) = \begin{cases} 0 & \vec{r}_0 \text{ außerhalb } V \\ \Omega/4\pi & \vec{r}_0 \text{ auf } S \\ 1 & \vec{r}_0 \text{ innerhalb } V \end{cases}$$

Ω ... Raumwinkel (= 2π für glatte Flächen)

4. Randelemente

- Idee (cont'd)

– mit Definition \vec{r} auf Rand Q und \vec{r}_0 Zielpunkt P :

$$\iint_S \left(\hat{p}(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \vec{n}} - G(P, Q) \frac{\partial \hat{p}(Q)}{\partial \vec{n}} \right) d\vec{S} = \hat{p}(P) C(P)$$

Interpretation: \hat{p} an Zielpunkt P innerhalb von V (inklusive Berandung) hängt ab von der Verteilung von \hat{p} und $\hat{v}_n \propto \partial \hat{p} / \partial \vec{n}$ auf der Oberfläche Q

4. Randelemente

- numerische Lösung: ähnlich FE ■
 - Zerlegung des Randes in Elemente/Knoten ■
 - Interpolation von \hat{p} und $\partial\hat{p}/\partial\vec{n}$ auf Rand durch Formfunktionen mit Bezug auf die Knotendrucke

p_j ■

– damit
$$\sum_j p_j h_{jk} - \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial \vec{n}} g_{jk} = c_k p_k$$

4. Randelemente

- numerische Lösung (cont'd)

- Kollokationsverfahren: ■

1. p_k auf den Rand legen

$$(\mathbf{H} - \mathbf{C}) \vec{p}_{\text{Knoten}} = \mathbf{G} \vec{v}_{n,\text{Knoten}}(-j\omega \varrho_-) \quad \blacksquare$$

Randbedingungen vorgeben $(p_j, v_{n,j}, p_j/v_{n,j})$, ■
Gleichungssystem für "übrige" $p_j, v_{n,j}$ lösen ■

2. Lösung für interessierende Punkte P innerhalb V

$$\hat{p}(P) = \sum_j p_j h_j(P) + j\omega \varrho_- \sum_j v_{n,j} g_j(P)$$

4. Randelemente

- praktische Benutzung

- Ablauf - ähnlich FE ■

1. Preprocessing: Geometrieimport, Vernetzung (des Randes!), Materialkenngrößen (ρ , c), Randbedingungen ■

2. Lösung: pro interessierender Frequenz Schalldrücke an interessierenden Punkten berechnen ■

3. Postprocessing: Ausgabe bzw. grafische Darstellung ■

- zum Ausprobieren: www.openbem.dk

Numerik?

Finite Differenzen - . . .

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM- . . .

5. Vergleich TLM-FEM-BEM

- akustische Probleme prinzipiell mit allen 3 Verfahren lösbar

	TLM	FEM	BEM
Netz	Volumen regelmäßig	Volumen	Fläche
Netzdichte	$\leq 10\lambda$	$\leq 6\lambda$	$\leq 6\lambda$
RB	v schwierig	Z häufig nicht implementiert	
Implementierg.	einfach	mittel	schwierig

- kommerzielle Programme in der Regel mit integriertem Prä- und Postprozessor
- Solver für alle Verfahren häufig im Internet verfügbar, Problem: Prä- und Postprozessor?

Numerik?

Finite Differenzen - ...

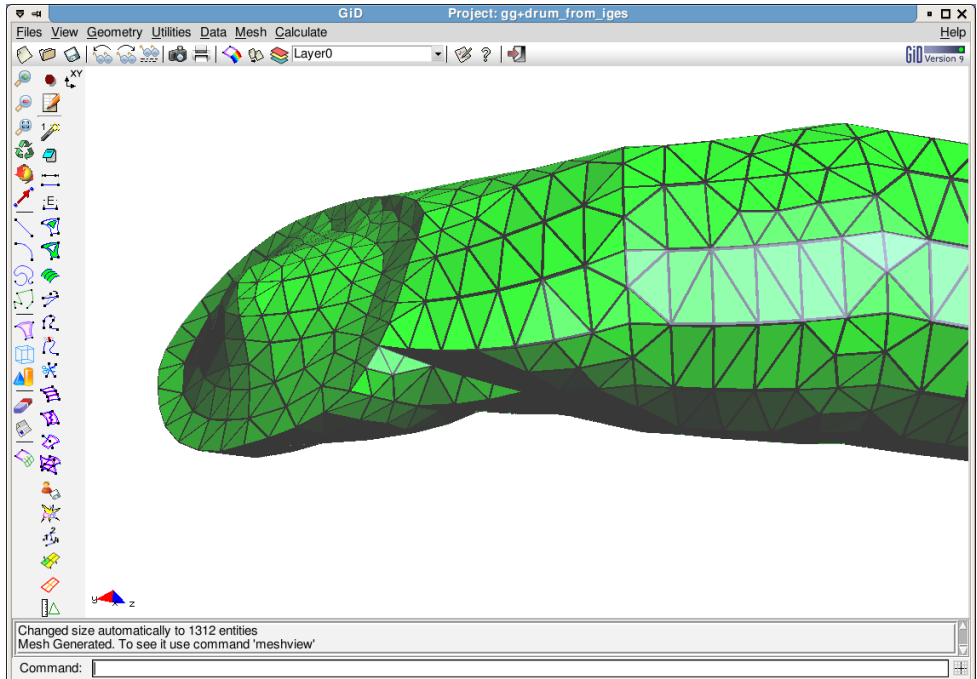
Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM-...

5. Vergleich TLM-FEM-BEM

- Alternative separater Prä-/Postprozessor?



Numerik?

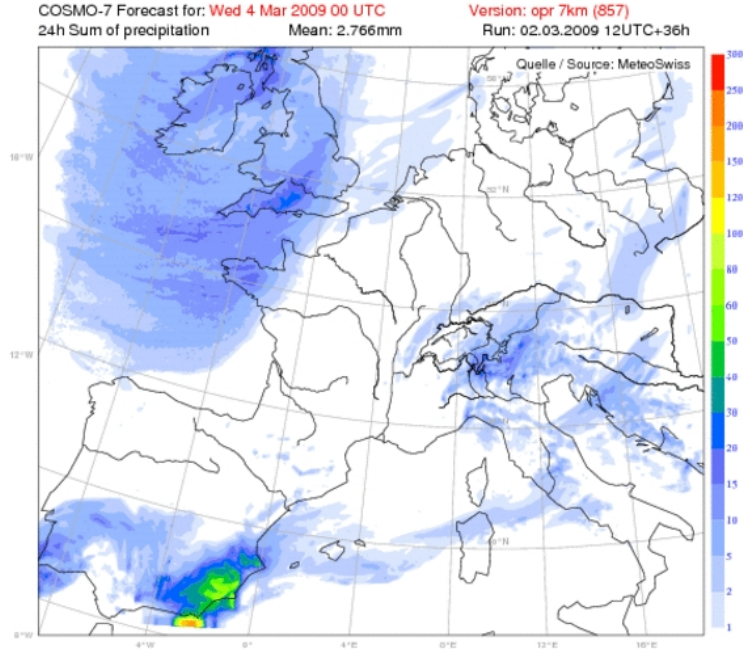
Finite Differenzen - ...

Finite Elemente

Randelemente

Vergleich TLM-...

- Numerik?
- Finite Differenzen - . . .
- Finite Elemente
- Randelemente
- Vergleich TLM- . . .



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!