# Akustische Messverfahren

Prof.Dr.-Ing. Matthias Blau
Institut für Hörtechnik und Audiologie
FH Oldenburg/Ostfriesland/Wilhelmshaven

XXI. Winterschule der Deutschen Gesellschaft für Medizinische Physik
Pichl 2009

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

## Übersicht

1. Das Wesen des Messens
2. Instrumentierung
3. Schallpegel
4. Spektren
5. Übertragungsfunktionen

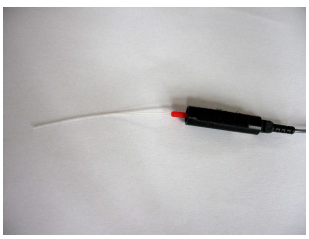
# 1. Das Wesen des Messens

- Messen bedeutet Parametrisieren von Modellen
- im Zusammenhang mit akustischen Messungen häufig verwendete Modelle:
  a) wenn die Anregung nicht kontrolliert werden kann: stationäre Zufallsprozesse
     → aufgenommener Schalldruck ist Stichprobe eines bandbegrenzten GAUSS-Prozesses
     $p \sim \mathcal{N}(0, \tilde{p}^2)$ mit $\tilde{p}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{pp}(f)\,\mathrm{d}f$
     → Messaufgabe: schätze $\tilde{p}^2$ oder $\Gamma_{pp}(f)$
  b) wenn die Anregung kontrolliert werden kann: LTI-System
     → Messaufgabe: schätze $H(f)$ oder $h(t)$
- wenn Bedingung b) erfüllt ist, immer Übertragungsfunktionen / Impulsantworten messen!



# 2. Instrumentierung

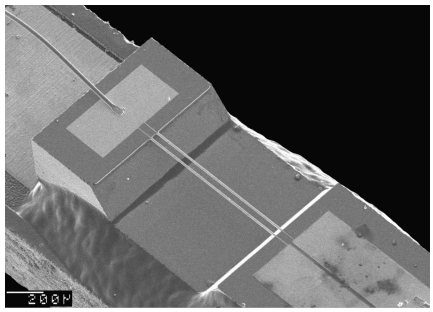
- Schalldruck $p$: Mikrofone



  – bei Messmikrofonen unterschiedliche Entzerrungen (Druck vs. Freifeld vs. Diffusfeld) beachten
  – Signalkonditionierung: integrierte Vorverstärker, externe Speiseteile (Polarisationsspannung bei Messmikrofonen!)
  – Kalibrierung: in der Regel in kleinen abgeschlossenen Volumina

# 2. Instrumentierung

- Schallschnelle $\vec{v}$: Mikrofonpaare oder Hitzdraht-Anemometrie



  - Signalkonditionierung: siehe Messmikrofone bzw. spezielle Speisung bei Hitzdrahtsonden
  - Kalibrierung: in speziellen Kupplern (Mikrofonpaare) bzw. in Rohren oder im Freifeld

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

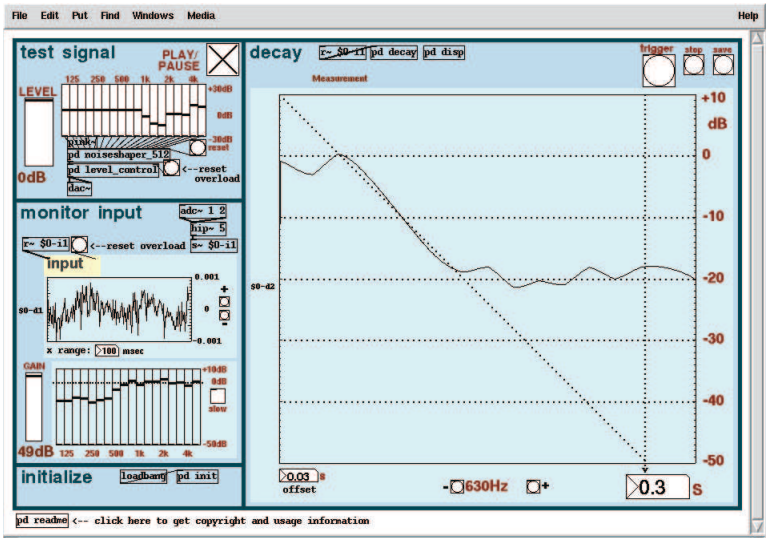
# 2. Instrumentierung

- Schwingbeschleunigung $\vec{a}$ bzw. Schwingschnelle $\vec{v}$: Beschleunigungsaufnehmer bzw. Laser-Vibrometrie

  - Signalkonditionierung: Ladungsverstärker bzw. Laser-Controller
  - Kalibrierung: Kalibrierschwingtische, ggf. mit Kalibriermassen

# 2. Instrumentierung

- Signalanalyse
  - für Standardaufgaben entsprechende Kiste kaufen
  - für Forschung/Entwicklung PC-basierte Systeme (offen, flexibel), z.B. PureMeasurement (`www.hoertechnik-audiologie.de/downloads`)



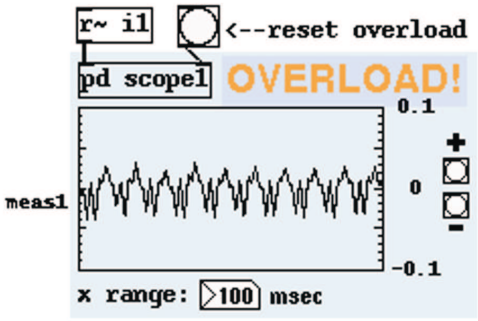



# 3. Wer misst, misst Mist

- empfohlene Strategie: AAA
- Anhören:

Rauschen?, Verzerrungen?, Brummen?, . . . ?

- Anschauen: Oszillogramme, Spektrogramme, . . .

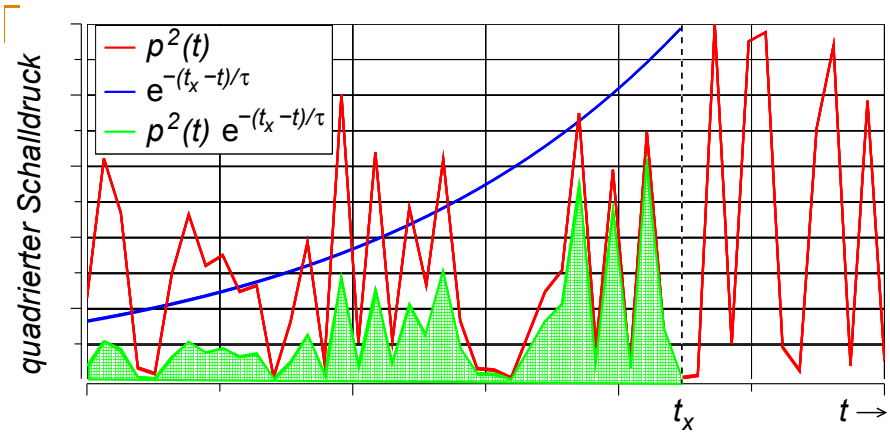



- Analysieren: Kohärenz, . . .

# 4. Schallpegel

- Definition Schalldruckpegel $L_p = 10\,\lg\left(\tilde{p}^2/p_0^2\right)\mathrm{dB}$
- $\tilde{p}^2$: $p(t)$ quadrieren, zeitlich mitteln (integrieren)

$$\tilde{p}^2(t_x) = \frac{1}{\tau}\int_{t=-\infty}^{t_x} p^2(t)\,\mathrm{e}^{-(t_x-t)/\tau}\,\mathrm{d}t$$




$\tau_{\mathrm{SLOW}} = 1\mathrm{s}$, $\tau_{\mathrm{FAST}} = 125\mathrm{ms}$

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

# 4. Schallpegel

- zeitliche Mittelung
  - äquivalenter Dauerschallpegel $L_{\mathrm{eq}}$

$$L_{\mathrm{eq}} = 10\,\lg\left(\frac{1}{T_{\mathrm{r}}}\sum_i T_i \underset{t_x \text{ in } T_i}{\text{Mittelwert}}\left\{\frac{\tilde{p}^2(t_x)}{p_0^2}\right\}\right)\mathrm{dB}$$

oder

$$L_{\mathrm{eq}} = 10\,\lg\left(\frac{1}{T_{\mathrm{r}}}\int_{t=0}^{T_{\mathrm{r}}} p^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \Big/ p_0^2\,\mathrm{dB}$$

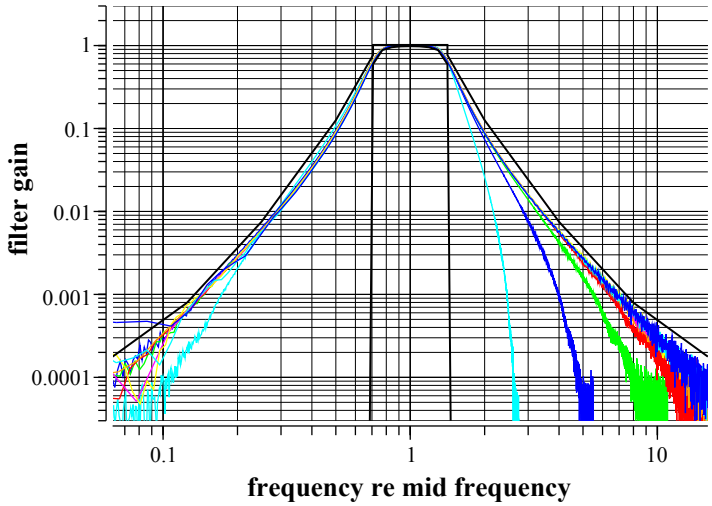
  - Taktmaximal-Mittelungspegel $L_{\mathrm{T,m}}$ oder $L_{\mathrm{T,eq}}$

$$L_{\mathrm{T,m}} = 10\,\lg\left(\frac{1}{T_{\mathrm{r}}}\sum_i T_i \max_{t_x \text{ in } T_i}\left\{\frac{\tilde{p}^2(t_x)}{p_0^2}\right\}\right)\mathrm{dB}$$

# 5. Spektren

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

- Spektren über Filter
  - Oktav-, Terzfilter: konstante *relative* Bandbreite
  - IEC 1260
    a) $f_{\mathrm{m},i,\mathrm{Oktav}} = 2^i \cdot 1$ kHz, $f_{\mathrm{m},i,\mathrm{Terz}} = 2^{(i/3)} \cdot 1$ kHz
    b) $f_{\mathrm{m},i,\mathrm{Oktav}} = 10^{i0.3} \cdot 1$ kHz, $f_{\mathrm{m},i,\mathrm{Terz}} = 10^{(i0.1)} \cdot 1$ kHz

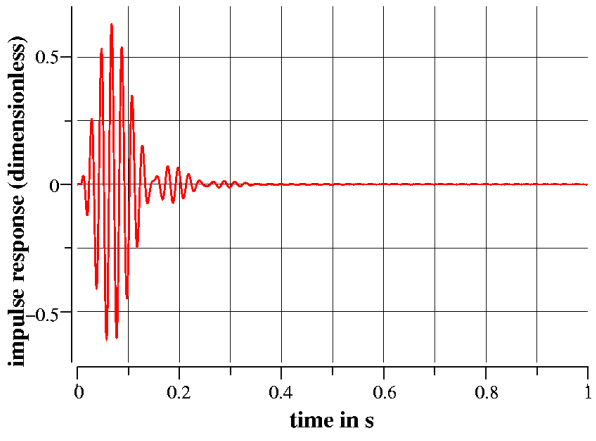



Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

# 5. Spektren

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

- Spektren über Filter (cont'd)
  - im Zeitbereich: Verzögerung $T_{\mathrm{R}} \approx 1/B$, effektive Länge $T_{\mathrm{E}} \approx 3/B$
    → z.B. Terzfilter, $f_{\mathrm{m}} = 50$ Hz: $T_{\mathrm{R}} \approx 87$ ms, $T_{\mathrm{E}} \approx 260$ ms




  → für Nachhallzeitmessungen: $BT > 16$

# 5. Spektren

- Spektren über Filter (cont'd)
  - Statistik von Effektivwertschätzern
    - Modell: $p_\mathsf{B} \sim \mathcal{N}(0, \tilde{p_\mathsf{B}}^2)$
    - Schätzer 1 (zeitkontinuierlich, Rechteckfenster):

$$\widehat{\tilde{p}^2_\mathsf{B}} = \frac{1}{T}\int_T p^2_\mathsf{B}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathsf{E}\left\{\widehat{\tilde{p}^2_\mathsf{B}}\right\} = \tilde{p}^2_\mathsf{B}, \quad \mathsf{Var}\left\{\widehat{\tilde{p}^2_\mathsf{B}}\right\} = \frac{\tilde{p}^4_\mathsf{B}}{BT}$$

    - Schätzer 2 (zeitdiskret, Rechteckfenster):

$$\widehat{\tilde{p}^2_{\mathsf{B},N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p^2_\mathsf{B}(n/F_\mathsf{s})$$

$$\mathsf{E}\left\{\widehat{\tilde{p}^2_{\mathsf{B},N}}\right\} = \tilde{p}^2_\mathsf{B}, \quad \mathsf{Var}\left\{\widehat{\tilde{p}^2_{\mathsf{B},N}}\right\} = \frac{1}{N}\,\frac{\tilde{p}^4_\mathsf{B}}{B/F_\mathsf{s}}$$

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

# 5. Spektren

- Spektren über Filter (cont'd)
    - Schätzer 3 (zeitdiskret, Exponentialfenster):

$$\widehat{\tilde{p}^2_{\mathsf{B},\alpha}}(n) = \alpha p^2_\mathsf{B}(n) + \big(1-\alpha\big)\widehat{\tilde{p}^2_{\mathsf{B},\alpha}}(n-1)$$

äquivalente Zeitkonstante $\tau = -\dfrac{1}{F_\mathsf{s}}\ln(1-\alpha)$

$$\mathsf{E}\left\{\widehat{\tilde{p}^2_{\mathsf{B},\alpha}}\right\} = \tilde{p}^2_\mathsf{B}, \quad \mathsf{Var}\left\{\widehat{\tilde{p}^2_{\mathsf{B},\alpha}}\right\} = \frac{\alpha}{2-\alpha}\,\frac{\tilde{p}^4_\mathsf{B}}{B/F_\mathsf{s}}$$

  - bei allen Schätzern ist die Varianz umgekehrt proportional zu Filterbandbreite $B$ und der jeweiligen Mittelungszeit
  - daher bei Terz-/Oktavfiltern besonders bei niedrigen Mittenfrequenzen hohe Varianz aufgrund kleiner Filterbandbreite

# 5. Spektren

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

- Spektren über FFT
  - Modell: $p \sim \mathcal{N}(0, \tilde{p}^2), \quad \tilde{p}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{pp}(f)\,\mathrm{d}f$
  - Messaufgabe: Schätzen der Leistungsdichte

$$\Gamma_{pp}(f) = \mathcal{F}\{\gamma_{pp}(\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,\mathsf{E}\{P_T^*(f)P_T(f)\}$$

  - Realisierung: Methode nach Welch (1967)

$$\widehat{S}_{pp}(f = kF_\mathsf{s}/M) = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} \frac{1}{MU_M}\, P_M^*(k,r)P_M(k,r)$$

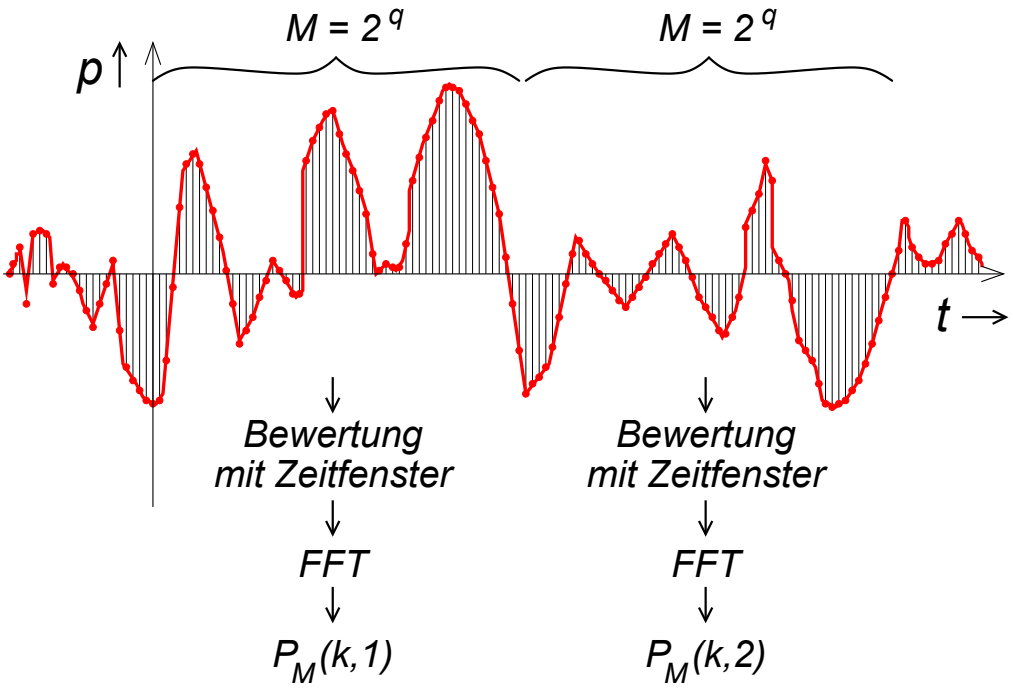
$$P_M(k) = \mathsf{FFT}\{p_M(m)w_M(m)\}$$

$$MU_M = \sum_{m=1}^{M} w_M^2(m) \quad \text{Fensterenergie}$$

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

# 5. Spektren

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen



# 5. Spektren

- Spektren über FFT (cont'd)
  - Vergleich des WELCH-Schätzers mit wahrer Leistungsdichte
    - Zeitabtastung → *aliasing* im Frequenzbereich
      Lösung: analoge Anti-Alias-Filter
    - $M$ endlich → *leakage* im Frequenzbereich
      Lösung: HANN-Fenster mit $M > 4F_\mathrm{s}/B_\mathrm{r}$
    - Mittelung über endlich viele ($R$) Blöcke
      → zufällige Schwankungen des Schätzers
      Lösung: $R$ groß genug, überlappende Blöcke

$$\mathrm{Var}\{\widehat{S}_{pp}(k)\}\Big|_{\text{kein overlap}} \approx \frac{1}{R} S_{pp}^2(k)$$

$$\mathrm{Var}\{\widehat{S}_{pp}(k)\}\Big|_{\text{50\% overlap}} \approx \frac{11}{9R} S_{pp}^2(k)$$

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

# 5. Spektren

- Spektren über FFT (cont'd)
  - Nachbemerkung zu Skalierungsfaktoren

analog:
$$\tilde{p}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{pp}(f)\,\mathrm{d}f$$

↓ Zeitabtastung

$$\left(S_{pp} = F_\mathrm{s}\Gamma_{pp}\right)$$

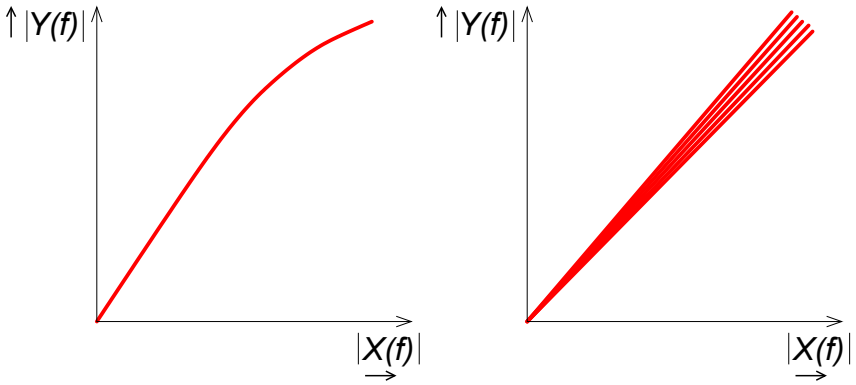
zeitdiskret:
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p^2\left(\frac{n}{F_\mathrm{s}}\right) = \frac{1}{F_\mathrm{s}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_{pp}\left(\frac{f}{F_\mathrm{s}}\right)\mathrm{d}\left(\frac{f}{F_\mathrm{s}}\right)$$

↓ Frequenzabtastung

$$= \frac{F_\mathrm{s}/M}{F_\mathrm{s}}\sum_{k=1}^{M} S_{pp}(k)$$

# 6. Übertragungsfunktionen

- Modell: LTI-System
- Messaufgabe: $H_{xy}(f) = Y(f)/X(f)$ schätzen
- in Praxis sind betrachtete Systeme häufig schwach nichtlinear oder/und zeitvariant



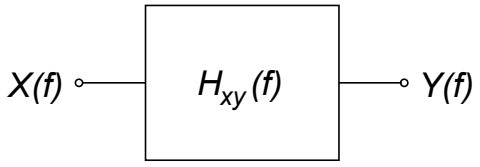

→ Entscheidung: Schätzung des punktuellen (einzelner Anregungspegel, einzelner Zeitpunkt) oder des gemittelten Verhaltens?

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

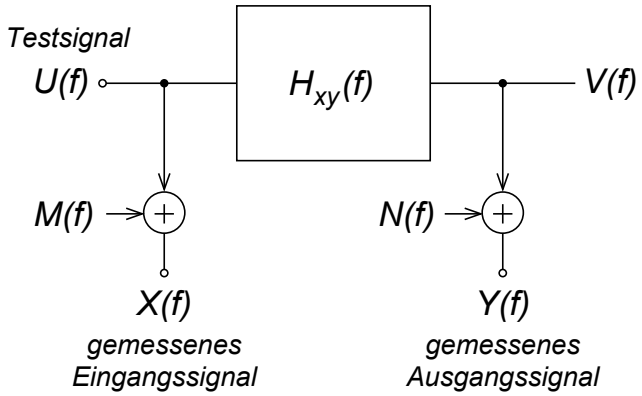
# 6. Übertragungsfunktionen

- Problem Messrauschen
  - Modell ohne Rauschen/Artefakte




$$Y(f) = H_{xy}(f)X(f)$$
$$\Gamma_{xy}(f) = H_{xy}(f)\Gamma_{xx}(f)$$
$$\Gamma_{yy}(f) = H_{xy}(f)\Gamma^*_{xy}(f)$$

  - Modell mit unkorreliertem Rauschen



# 6. Übertragungsfunktionen

- punktuellen Schätzung - deterministische Testsignale
  - Testsignale: Sinus, stepped sine, Multiton, Sweeps, Maximalfolgen
  - Schätzer:

$$\text{a)}\ \widehat{H}_{xy}(f) = \frac{\sum_{r=1}^{R} Y_M(f,r)}{\sum_{r=1}^{R} X_M(f,r)}$$

$$\text{b)}\ \widehat{H}_{xy}(f) = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} \frac{Y_M(f,r)}{X_M(f,r)}$$

  - Messrauschen führt nur zu zufälligen Fehlern

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

# 6. Übertragungsfunktionen

- mittlere Schätzung - zufällige Testsignale
  - Testsignale: weißes oder gefärbtes Rauschen, Sprache, Musik
  - Modell: Messrauschen, Nichlinearitäten und Zeitvarianzen werden als unkorrelierte Rauschvorgänge auf Eingang und Ausgang betrachtet
    $\rightarrow$ für jede betrachtete Frequenz $f$ gilt

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{yy} & \Gamma_{xy}^{*} \\ \Gamma_{xy} & \Gamma_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -H_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{nn} & 0 \\ 0 & \Gamma_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -H_{xy} \end{pmatrix}$$

  - verschiedene Schätzer sind jeweils optimal für bestimmte Annahmen zu den Rauschvorgängen auf Eingang und Ausgang

# 6. Übertragungsfunktionen

- mittlere Schätzung - zufällige Testsignale (cont'd)
  - $H_1$-Schätzer
    - Annahme: $\Gamma_{mm} = 0$
      (kein Rauschen am Eingang)
    - Schätzer:
      $$H_{xy} = \frac{\Gamma_{xy}}{\Gamma_{xx}}$$
    - was wenn . . . ?
      $\rightarrow$ Unterschätzung

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

# 6. Übertragungsfunktionen

- mittlere Schätzung - zufällige Testsignale (cont'd)
  - $H_2$-Schätzer
    - Annahme: $\Gamma_{nn} = 0$
      (kein Rauschen am Ausgang)
    - Schätzer:
      $$H_{xy} = \frac{\Gamma_{yy}}{\Gamma_{xy}^*}$$
    - was wenn . . . ?
      $\rightarrow$ Überschätzung

# 6. Übertragungsfunktionen

- mittlere Schätzung - zufällige Testsignale (cont'd)
  - $H_3$-Schätzer
    - Annahme: $\Gamma_{xx}/\Gamma_{mm} = \Gamma_{yy}/\Gamma_{nn}$ (gleiche SNRs an Ein- und Ausgang)
    - Schätzer:

$$H_{xy} = \sqrt{\frac{\Gamma_{xy}}{\Gamma_{xx}}\frac{\Gamma_{yy}}{\Gamma_{xy}^*}}$$

    - was wenn . . . ?
      → Unter- oder Überschätzung

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

# 6. Übertragungsfunktionen

- mittlere Schätzung - zufällige Testsignale (cont'd)
  - $H_V$-Schätzer
    - Annahme: $\Gamma_{mm} = \Gamma_{nn}$ (Rauschen auf Eingang und Ausgang gleich groß, aber unkorreliert)
    - Schätzer:

$$H_{xy} = \frac{1}{2\Gamma_{xy}}\left(\Gamma_{yy} - \Gamma_{xx} + \sqrt{\left(\Gamma_{yy} - \Gamma_{xx}\right)^2 + 4\left|\Gamma_{xy}\right|^2}\right)$$

    - was wenn . . . ?
      → Unter- oder Überschätzung

# 6. Übertragungsfunktionen

- mittlere Schätzung - zufällige Testsignale (cont'd)
  - Problem zeitliche Verzögerung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal (z.B. durch Schallausbreitung)
    - führt zu systematischen Fehlern

$$\text{Kreuzleistungsdichte } \widehat{S}_{xy} \approx \left(1 - \frac{\tau}{M/F_s}\right) S_{xy}$$

$$\text{Übertragungsfunktion } \widehat{H}_{xy} \approx \left(1 - \frac{\tau}{M/F_s}\right) H_{xy}$$

$$\text{Kohärenz } \widehat{\gamma^2}_{xy} \approx \left(1 - \frac{\tau}{M/F_s}\right)^2 \gamma^2_{xy}$$

    - Abhilfe: a) Zeitfenster lang genug
      b) Verzögerung um $\tau$ im gemessenen $x(t)$ kompensieren

Institut für Hörtechnik + Audiologie IHA

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

# 6. Übertragungsfunktionen

- mittlere Schätzung - zufällige Testsignale (cont'd)
  - zufällige Fehler
    - $H$-Schätzer beruhen auf Schätzern von Leistungsdichten, die ihrerseits zufällige Fehler aufweisenm, siehe Abschnitt 5
    - aber: zufällige Fehler der Leistunsdichteschätzer sind häufig stark korreliert, da sie in der Regel aus *einem* Prozess hervorgegangen sind
    - wichtige Varianzformeln:

$$\text{Var}\left\{ \left| \widehat{H}_{xy} \right| \right\} \approx \frac{1 - \gamma^2_{xy}}{2R\gamma^2_{xy}} \left| H_{xy} \right|^2$$

$$\text{Var}\left\{ \arg\left( \widehat{H}_{xy} \right) \right\} \approx \frac{1 - \gamma^2_{xy}}{2R\gamma^2_{xy}} \text{ rad}^2$$

# 6. Übertragungsfunktionen

Das Wesen des . . .
Instrumentierung
Wer misst, misst Mist
Schallpegel
Spektren
Übertragungsfunktionen

- praktische Vorgehensweise
  1. AAA
  2. mit Rauschen beginnen
  3. keine Übertragungsfunktion ohne Kohärenz!
     $\gamma_{xy}^2 = \left|\Gamma_{xy}\right|^2 / (\Gamma_{xx}\Gamma_{yy})$ ist wichtiger Indikator für viele Fehler (schlechtes SNR, leakage Nichtlinearitäten, Zeitvarianzen)
     Achtung: bei periodischen Anregungssignalen reagiert $\gamma_{xy}^2$ nicht auf Übersteuerungen!
  4. Vergleich mit Multitonsignal, Fensterlänge optimieren (ggf. $x(t)$ verzögern)
  5. Entscheidung für ein Anregungssignal, Anregungspegel optimieren