Vorwort

Die Akustik ist ein klassischer Zweig der Physik, der ein wenig aus der Mode gekommen zu sein scheint, obwohl akustische Phänomene und die Beherrschung der Akustik für das tägliche Leben des Menschen eine große Bedeutung haben: Angefangen von der Bedeutung akustischer Signale als Orientierungshilfe in der Umwelt und Warnsignale, denen man anders als im optischen System nicht etwa durch Zuklappen der Ohren entgehen kann, bis hin zur Sprachkommunikation, zur Wahrnehmung und Empfindung von Musik, zur für den Menschen in westlichen Industrienationen am meisten beeinträchtigenden Umweltverschmutzung Lärm bis hin zu medizinischen Anwendungen etwa in der Stimm- und Sprachdiagnostik, dem medizinischen Ultraschall, der Lithotripsie oder der Audiologie - die Liste von alltäglichen Bereichen, in denen die Akustik eine wesentliche Rolle spielt, ließe sich beliebig fortsetzen. Dabei zeigt sich, daß die in den letzten Jahren „heißen“ Forschungsthemen der Akustik weniger in dem Grundlagenbereich, sondern eher in den Anwendungen und der Überlappung der Akustik mit anderen Gebieten, wie etwa der Medizin liegen. Aus diesem Grund ist die vorliegende Ausarbeitung der medizinischen Akustik gewidmet, die sich natürlich auf die ebenfalls zu behandelnde physikalische und technische Akustik entscheidend bezieht. Neben den Grundlagen sollen demnach die Bedeutung akustischer Phänomene für die Anwendung in der Medizin und praktische Beispiele behandelt werden. Der Aufbau und die Stoffauswahl gliedert sich dabei an den Katalog zur Weiterbildungsordnung zum Medizinphysiker, der Deutschen Gesellschaft für Medizinische Physik. Dabei wird unterschieden zwischen der medizinischen Akustik und der Audiologie bzw. audiologischen Akustik, so daß das große und für praktische, klinische Anwendungen wichtige Gebiet der Audiologie in der vorliegenden Ausarbeitung nur sehr knapp angerissen wird. Für die Teilgebietsbezeichnung Audiologie ist neben den bereits genannten Kursen Audiologie und medizinische Akustik noch der Kurs physikalische Meßtechnik in der Medizin erforderlich, so daß die Inhalte dieser drei Kurse thematisch aufeinander abgestimmt sind. Die vorliegende Ausarbeitung gliedert sich dabei wie folgt:

GLIEDERUNG

I. Physikalische Grundlagen der Akustik

I.1. Schwingungen und Wellen

Die periodische Schwingung stellt ein grundlegendes Phänomen der Akustik dar, die in sehr unterschiedlichen Variationen auftreten kann. Als Prototyp eines schwingungsfähigen Systems, an dem man eine Reihe von prinzipiellen Eigenschaften sehr gut studieren kann, betrachten wir eine schwingende Saite, die an beiden Enden in einem Abstand von l eingespannt ist. Dabei bezeichne F_x die Längsspannung der Saite, d. h. die Kraft, mit der die Saite angespannt wird und $m^{/}$ bezeichne die Massendichte (Masse pro Länge). Die einfachste Modellvorstellung, wie eine derartige Saite schwingen kann, setzt voraus, daß die Gesamtmasse der Saite m in einem Punkt, dem Mittelpunkt vereinigt ist:

a) Masse im Mittelpunkt vereinigt:

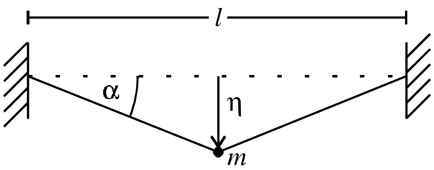

Abbildung 1.1: Schwingende Saite als 1-Massen-System

Wenn wir mit $m = m^{/} \cdot l$ die Gesamtmasse bezeichnen, so wirkt auf diese Masse eine Rückstellkraft von

$$-2F_x \cdot \alpha = -2F_x \cdot \frac{\eta}{l/2} \overset{!}{=} m^{/} \cdot l \cdot \ddot{\eta} \qquad \text{(I.1)}$$

Dabei bezeichnet α den Auslenkungswinkel und η bezeichnet die Auslenkung des idealisierten Massepunktes. Obige Gleichung besagt also, daß die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung und zur Zugspannung ist, und daß diese Rückstellkraft gleich der Trägheitskraft (Masse mal Beschleunigung) der sich bewegenden Masse ist. Durch Auflösung dieser Gleichungen gelangen wir auch auf eine **Schwingungsgleichung:**

$$\ddot{\eta} + \frac{4F_x}{m^{/} l^2} \eta = \ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta = 0 \qquad \text{(I.2)}$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen, linearen Differentialgleichung zweiten Grades in η beschreibt eine harmonische Schwingung mit einer vorgegebenen Amplitude und Phasenlage. Zur Vereinfachung der Rechnung und Schreibweise wird diese Lösung gleich als komplexe Größe geschrieben, wobei der physikalisch relevante Teil der Realteil dieser Funktion ist:

$$\eta(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\hat{\eta}} \cdot e^{i\omega_0 t}\right) \tag{I.3}$$

$\underline{\hat{\eta}}$ ist die komplexe Amplitude, deren Betrag die (Maximal)-Amplitude der Schwingung angibt und deren Argument die Phasenlage der Lösung angibt. Als Grundfrequenz ω_0, d. h. Kreisfrequenz, mit der die allgemeine Lösung eine Schwingung beschreibt, errechnet sich ein Wert zu:

$$\omega_0 = \frac{2}{l} \cdot \sqrt{\frac{F_x}{m'}} \tag{I.4}$$

Diese Abhängigkeit der Schwingungs-Eigenfrequenz von der Wurzel aus dem Quotienten aus Zugspannung und Massenbelegung sowie von einer Größe, die umgekehrt proportional zur Länge ist, ist leider nur approximativ richtig. Die Abhängigkeit von der Länge der Saite wird zwar richtig beschrieben und damit wird auch die pythagoräische, musikalische Tonskala beschrieben: Bei der „reinen“ Stimmung, die Pythagoras anhand von systematischen Längenänderungen von schwingenden Saiten untersucht hat, ergibt sich eine Oktave gerade bei Halbierung der Saitenlänge, eine Quinte gerade bei Verkürzung der Saitenlänge um den Faktor 2/3, eine Quarte bei 3/4, eine große Terz bei 4/5 usw.. Obwohl durch die Einführung der wohltemperierten Stimmung in der musikalischen Praxis nicht exakt diese pythagoräischen Frequenzverhältnisse eingehalten werden, zeigt jedoch diese einfache Betrachtung bereits qualitativ den richtigen Zusammenhang zwischen Saitenlänge und Eigenfrequenz. Die errechnete Eigenfrequenz ω_0 ist allerdings um den Faktor $\pi/2$ falsch, so daß eine bessere Näherung an die Schwingung einer wirklichen Saite erforderlich ist.

b) 2-Massen-Modell:

Diese Näherung teilt die Gesamtmasse der schwingenden Saite in 2 Teil-Massen auf, die jeweils l/4 von einem Ende der Saite entfernt aufgehängt sind. Wenn die Auslenkung der ersten Masse mit η_1 und der zweiten Masse mit η_2 bezeichnet wird, gelten die folgenden beiden Bewegungsgleichungen für die beiden Massen, die jeweils aus der Rückstellkraft und der Beschleunigungskraft abgeleitet werden:

$$F_x\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{l/2}+\frac{-\eta_1}{l/4}\right)=\frac{m'l}{2}\ddot{\eta}_1 \tag{I.5}$$

$$F_x\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{l/2}+\frac{-\eta_2}{l/4}\right)=\frac{m'l}{2}\ddot{\eta}_2 \tag{I.6}$$

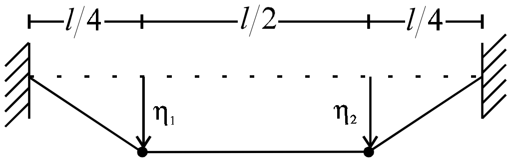

Abbildung 1.2: Schwingende Saite als 2-Massen-System

Durch Ausmultiplizieren dieser gekoppelten, linaren Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der Variablen-Substitution

$$\omega_0=\frac{2}{l}\cdot\sqrt{\frac{F_x}{m'}} \tag{I.7}$$

folgt:

$$-\eta_1+\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\ddot{\eta}_2+3\eta_2=0 \tag{I.8}$$

Um dieses System lösen zu können, setzen wir für die Schwingungen η_1 bzw. η_2 an:

$$\eta_{1/2}=\mathrm{Re}\left(\underline{\hat{\eta}}_{1/2}\cdot e^{i\omega t}\right)\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}\left[3-\frac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right]\underline{\hat{\eta}}_1-\underline{\hat{\eta}}_2&=0\\-\underline{\hat{\eta}}_1+\left[3-\frac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right]\underline{\hat{\eta}}_2&=0\end{aligned} \tag{I.9}$$

Eine nichttriviale Lösung für dieses Gleichungssystem in $\underline{\hat{\eta}}_1$ und $\underline{\hat{\eta}}_2$ ergibt sich, falls die Koeffizientendeterminante gleich 0 ist, so daß die Gleichung umgeformt werden kann zu:

$$\left[3-\frac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right]^2-1=0 \tag{I.10}$$

Hieraus folgt, daß es zwei Eigenschwingungen gibt, deren jeweilige Frequenz wir mit ω_I und ω_{II} bezeichnen:

I. $$\omega_I = \sqrt{2}\ \omega_0 ,\ \underline{\hat{\eta}}_1 = \underline{\hat{\eta}}_2 ,\ \text{gleichphasig} \tag{I.11}$$

II. $$\omega_{II} = 2\omega_0 ,\ \underline{\hat{\eta}}_1 = -\underline{\hat{\eta}}_2 ,\ \text{gegenphasig} \tag{I.12}$$

Die erste Eigenschwingung ist eine bessere Näherung an die Grundmode der Saitenschwingung als das Ein-Massen-Modell, die Frequenz ω_I ist allerdings immer noch um 10% falsch.

Die zweite Schwingungsform weist einen Schwingungsknoten in der Mitte auf, wobei jede Hälfte der Gesamtsaite mit derselben Näherung beschrieben wird wie das Ein-Massen-Modell der Gesamtsaite (s. o.). Es handelt sich hierbei um die erste Oberschwingung.

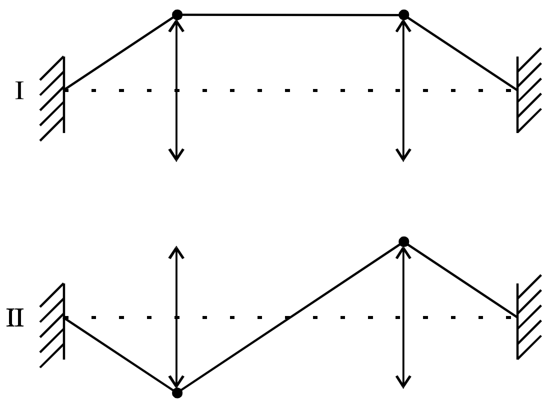

Abbildung 1.3: Eigenmoden des 2-Massen-Systems

Die allgemeine Lösung dieses Zwei-Massen-Modells wäre die Linearkombination aus den Schwingungsmoden I und II, so daß mit den jeweiligen komplexen Schwingungsamplituden insgesamt 4 Parameter festzulegen wären.

c) n-Massen-Modell

Die Annäherung an eine kontinuierliche Massenverteilung läßt sich beliebig fortfahren, wenn die schwingende Saite als ein System von n Massen aufgefaßt wird, wobei für jede Teilmasse mit der Auslenkung η_k die folgende Gleichung auftreten würde:

$$F_x\left(\frac{\eta_{k+1}-\eta_k}{l/n}-\frac{-\eta_k-\eta_{k-1}}{l/n}\right)=\frac{m'l}{n}\ddot{\eta}_k \qquad \text{(I.13)}$$

Dieses n-Massenmodell würde damit n Eigenschwingungen der Saite als Resultat liefern, so daß 2n Parameter als Anfangsbedingungen zur eindeutigen Festlegung der jeweiligen Schwingungsform notwendig wären. Erfolgversprechender ist jedoch der

d) Modellansatz als eindimensonales Kontinuum:

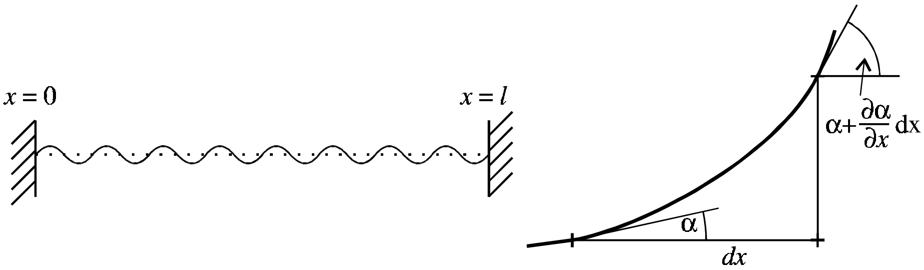

Abbildung 1.4: Schwingende Saite als eindimensionales Kontinuum

Auf ein differentielles Längs-Element der Saite mit der Länge dx läßt sich das Gleichgewicht aus Rückstellkraft und Beschleunigungskraft aufgrund des sich entlang von dx ändernden Auslenkungswinkels α berechnen als:

$$m'\,dx\,\ddot{\eta}=F_x\left(\alpha+\frac{d\alpha}{dx}dx-\alpha\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{d^2\eta}{dt^2}=c^2\cdot\frac{d^2\eta}{dx^2}\ ,\ \ c^2=\frac{F_x}{m'} \qquad \text{(I.14)}$$

Eindimensionale Wellengleichung

Es folgt also direkt die allgemeine Form der Wellengleichung für diesen speziellen Fall der eindimensionalen Wellenausbreitung, bei der die zweite zeitliche Ableitung proportional zur zweiten örtlichen Ableitung ist. Die Proportionalitätskonstante c beschreibt dabei die Phasengeschwindigkeit. Eine allgemeine Lösung dieser Wellengleichung nach d'Alembert beschreibt eine beliebig geformte „Störung", die sich entweder in + oder -x-Richtung mit der Geschwindigkeit c ausbreiten kann:

$$\eta(x,t)=\eta_+(x-ct)+\eta_-(x+ct) \qquad \text{(I.15)}$$

Die Saitenschwingung kann also als Überlagerung zweier gegengesetzter gleicher fortschreitender Wellen aufgefaßt werden, was auch als stehende Welle bezeichnet wird:

$$\eta(x,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{\hat{\eta}}\left(e^{ik(x+ct)} + e^{ik(x-ct)}\right)\right] = \mathrm{Re}\left[2\underline{\hat{\eta}}e^{ikx} \cdot \cos kct\right] \tag{I.16}$$

Charakteristisch für diese Form der stehenden Welle ist die multiplikative Verknüpfung der periodischen Ortsabhängigkeit mit der periodischen Zeitabhängigkeit, so daß die Welle nicht fortschreitet, sondern ortsfest ist, aber sich zeitlich sinusförmig verändert. Diese Separation zwischen Zeit- und Ortsabhängigkeit wird in der spezielleren Lösungsmethode nach Bernoulli bereits im Ansatz vorweggenommen:

$$\eta(x,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{\eta}(x) \cdot e^{i\omega t}\right] \tag{I.17}$$

Beim Einsetzen dieses Ansatzes in die Wellengleichung ergibt sich:

$$\frac{d^2\underline{\eta}}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \underline{\eta} = \frac{d^2\underline{\eta}}{dx^2} + k^2\underline{\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\eta}(x) = \underline{\hat{\eta}}_1 \cdot e^{ikx} + \underline{\hat{\eta}}_2 e^{-ikx} \tag{I.18}$$

Diese Lösung ist periodisch im Ort x, wobei die Größe

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{I.19}$$

den Betrag des Wellenvektors darstellt, der umgekehrt proportional zur Wellenlänge λ ist. Unter den Randbedingungen der schwingenden Saite:

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad \underline{\eta} = 0 \\ x = l: &\quad \underline{\eta} = 0 \end{aligned} \tag{I.20}$$

ergibt sich als Lösung:

$$\underline{\eta}(x) = \underline{\hat{\eta}}_n \cdot \sin k_n x \text{ , mit } k_n \cdot l = n \cdot \pi \tag{I.21}$$

Für die schwingende Saite läßt sich also eine unendliche Zahl von Eigenschwingungen angeben, die sich durch jeweils ein $n \in \mathbb{N}$ beschreiben lassen und für die die Schwingungsfrequenz ω_n auftritt:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \text{ ist bzw. } f_n = \frac{n \cdot c}{2l} \tag{I.22}$$

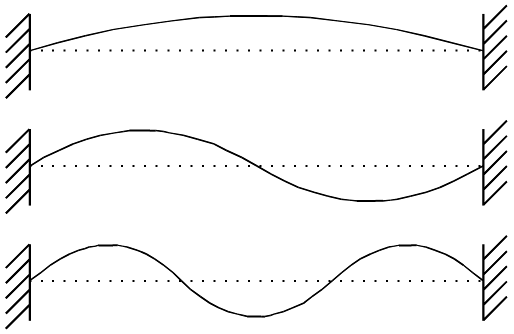

Abbildung 1.5: Einige Eigenmoden des eindimensionalen Kontinuums

Diese verschiedenen Schwingungsmoden beschreiben gerade den Grundton mit der Frequenz $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{F_x}{m'}}$ mit den Obertönen, die jeweils ganzzahlige Vielfache dieser Grundfrequenz sind und durch Unterteilung der Gesamt-Länge der schwingenden Saite in n gleich große Abstände zwischen benachbarten Knoten charakterisiert werden. Welcher dieser Schwingungsmoden mit welcher Amplitude angenommen wird, muß allerdings durch die Randbedingungen bzw. die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Die allgemeine Lösung hat die Form:

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\hat{\underline{\eta}}_n \cdot \sin\; k_n x \cdot e^{i\omega_n t}\right] \tag{I.23}$$

Die Koeffizienten $\hat{\underline{\eta}}_n$ sind eindeutig durch die Anfangsverteilungen η(x,0) bzw. durch die zeitlichen Ableitungen zum Zeitpunkt 0 festgelegt. Für das praktische Beispiel des Klangs eines Musikinstruments bedeutet das, daß der Frequenzgehalt der Saitenschwingung durch die Form der Schwingungsanregung der Saite vollständig festgelegt ist. Man kann also einem Gitarrenton selbst einige Zeit nach dem Anzupfen noch „anhören“ ob er hart oder weich angezupft wurde (obwohl in der Realität eine unterschiedliche Dämpfung der verschiedenen Schwingungsmoden vorhanden ist, die hier der Einfachheit halber nicht berücksichtigt werden).

I.2 Wellenausbreitung in Festkörpern

In Festkörpern sind sowohl Longitudinalwellen als auch Transversalwellen ausbreitungsfähig. Bei den Longitudinalwellen schwingen die Partikel des (sich als elastisch verformbar vorgestellten) Festkörpers parallel zur Ausbreitungsrichtung des Schalls um ihre Ruhelage herum, so daß es lokale Verdichtungszonen und Zonen mit geringerer Dichte ergibt. Bei den Transversalwellen schwingen die Teilchen dagegen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung um ihre Ruhelage (vgl. Abbildung 1.6). Beide Wellenformen sind in einem unendlich ausgedehnten Festkörper nicht unabhängig von einander zu betrachten, wobei die genaue Form der Wellenausbreitung von der Geometrie des Festkörpers bzw. seinen Abmessungen in Relation zur Wellenlänge abhängt. Generell ist jedoch die Ausbreitungsgeschwindigkeit für die Longitudinalwellen schneller als die für Transversalwellen. Um die Wellenausbreitung in Festkörpern quantitativ verstehen zu können, müssen zunächst die elastischen Eigenschaften des Festkörpers beschrieben werden, da sie für die mikroskopische Beschreibung der Wellenausbreitung von Bedeutung sind.

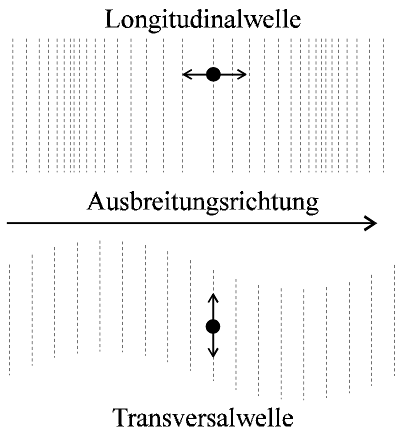

Abbildung 1.6: Transversal- und Longitudinalwelle

Als **elastische Konstanten** des Festkörpers sind die folgenden Größen definiert: Der **Elastizitätsmodul** E setzt die Dehnung eines Körpers (d. h. die relative Längenänderung $\Delta l / l$, die durch eine Zugspannung auf dem Festkörper hervorgerufen wird) in eine Proportionalitätsbeziehung zu dieser Zugspannung, die als Kraft F geteilt durch die angreifende Fläche S ausgedrückt wird:

$$\text{Dehnung}\left[\frac{\Delta l}{l}\right] = \frac{1}{E} \cdot \text{Spannung}\left[\frac{F}{S}\right] \tag{I.24}$$

Diese Beziehung wird auch als Hooke’sches Gesetz bezeichnet. Wenn der Festkörper nun in die eine Richtung ausgedehnt wird, „schrumpft“ er zugleich in den beiden Abmessungen, die quer zu der Ausdehnungsrichtung liegen, so daß mit einer relativen Längenänderung $\Delta l / l$ zugleich eine Verringerung des Querschnitts $\Delta A / A$ verbunden ist. Dieses Verhältnis aus Querkontraktion und Längsdehnung wird als **Poissonsche Querkontraktionszahl** μ bezeichnet, für die gilt:

$$\mu = \underbrace{\underbrace{\frac{-\Delta A}{A}}_{\text{Quer}-} / \underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{\text{Längs}-}}_{\text{Dehnung}} \qquad \text{(I.25)}$$

Aufgrund der Massenerhaltung ist der Bereich von möglichen Querkontraktionszahlen stark eingeschränkt, so daß für die meisten Stoffe ein Wert von $\mu = 0{,}25$ angenommen wird. Wenn im Gegensatz zu der Längs-Dehnung des Festkörpers eine allseitige Kompression des Festkörpers auftritt, wird aufgrund einer ähnlichen Gesetzmäßigkeit wie bei Gleichung (I.24) eine Proportionalitätsbeziehung zwischen einer Druckerhöhung Δp (d. h. Kraft pro Flächeneinheit) und der relativen Volumenänderung $\Delta V / V$ eintreten. Die zugehörige Proportionalitätskonstante wird als **Kompressionsmodul K** bezeichnet:

$$\underbrace{-\Delta p}_{\text{Druckaenderung}} = K \cdot \underbrace{\frac{\Delta V}{V}}_{\text{Volumenaenderung}} \qquad \text{(I.26)}$$

Als letzte elastische Konstante, die die elastischen Eigenschaften eines Festkörpers kennzeichnet, sei der **Schubmodul G** erwähnt, der bei einer Scherung des Festkörpers auftritt, z. B. bei einem Würfel, bei dem die Oberseite nach rechts und die Unterseite nach links gezogen wird, so daß ein Schubspannung F / d^2 auftritt, die zu einem Scherwinkel α führt, um den der Würfel sich schräg verformt; d bezeichnet dabei die Kantenlänge des Würfels an der Stirnfläche. Für den Schubmodul G gilt damit:

$$\text{Schubspannung}\left[\frac{F}{d^2}\right] = G \cdot \text{Scherwinkel } \alpha \qquad \text{(I.27)}$$

Da sämtliche elastischen Konstanten ähnliche Eigenschaften des Festkörpers beschreiben, hängen sie bei **isotropen Körpern** so zusammen, daß es nur zwei unabhängige Konstanten gibt und die restlichen Konstanten aus diesen berechenbar sind. Beispielsweise gilt für den Schubmodul:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad \text{(I.28)}$$

Anhand dieser elastischen Konstanten lassen sich nun für verschiedene Festkörper die unterschiedlichen Wellenausbreitungsformen mit den zugehörigen Ausbreitungsgeschwindigkeiten angeben. Für den Fall des unendlich **ausgedehnten Festkörpers** wird die sich darin ausbreitende Longitudinalwelle als **Dichtewelle** bezeichnet, weil sie zu lokalen Veränderungen der Dichte des Körpers führt. Die zugehörige Schallgeschwindigkeit c_L beträgt:

$$c_L = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}} \tag{I.29}$$

Wobei ρ die Dichte des Körpers beschreibt. Die in dem Körper ebenfalls ausbreitungsfähige Transversalwelle wird als **Schubwelle** bezeichnet, weil sie zu einer Scherung des Körpers in mikroskopischem Maßstab führt. Die zugehörige Schallgeschwindigkeit der Transversalwelle beträgt:

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{S}} \quad \Rightarrow \quad \frac{c_L}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}} \sim \sqrt{3}, \text{ da } \mu = 0.25 \text{ für viele Stoffe} \tag{I.30}$$

Die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwelle ist also deutlich größer als die der Transversalwelle. Wenn man einen ausgedehnten Festkörper daher an einer Seite mechanisch zur Schwingung anregt, kann an einer anderen Stelle im Festkörper, die weit genug von dieser Anregungsstelle entfernt ist, zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten eine von diesem Ereignis angeregte Wellenfront auftreten. Dieses Phänomen tritt bei Luft- und Wasserschall nicht auf, da dort nur Longitudinalwellen auftreten (siehe I.3).

In **begrenzten Festkörpern** hängt die Form der verschiedenen Wellentypen und ihre zugehörigen Ausbreitungsgeschwindigkeiten z. T. von der Geometrie des Festkörpers ab. Als Prototyp betrachten wir die Wellenausbreitung in einem rechteckförmigen Stab, bei dem die Longitudinalwelle als **Dehnwelle** bezeichnet wird. Die Longitudinalwelle führt zu lokalen Verdichtungen (mit Vergrößerung des Querschnittes) und Verjüngungen des Stabs. Wenn wir ein Volumenelement des Stabes an der Position x_0 betrachten, das sich von x_0 bis nach $x_0 + dx_0$ erstreckt, so tritt bei x_0 die Zugspannung σ und die Auslenkung in Longitudinalrichtung ξ auf. An dem Ort $x_0 + dx_0$ treten die entsprechenden, um das Differential veränderte Größen auf, also:

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \tag{I.31}$$

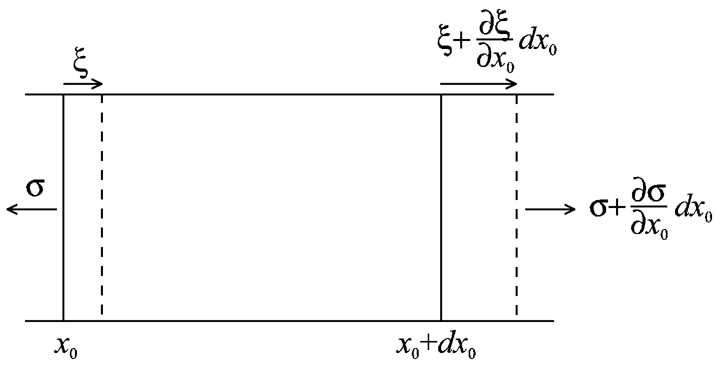

Abbildung 1.7: Differentielles Volumenelement eines rechteckförmigen Stabes bei dem sich eine Dehnwelle ausbreitet

Wenn S die Querschnittsfläche bezeichnet, kann somit die Kraft auf das Volumen aus der Differenz der beiden Zugspannungen berechnet werden. Weiterhin kann die Masse als Volumen · Dichte errechnet werden, so daß nach dem Newtonschen Gesetz sich die Beschleunigung des Volumenelements errechnet zu:

$$\underbrace{S \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x_0} dx_0}_{\text{Kraft auf Volumen}} = \underbrace{\rho \cdot S \cdot dx_0}_{\text{Masse}} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}_{\text{Beschleunigung}} \qquad \text{(I.32)}$$

Aus dieser Proportionalität zwischen zweiter partieller Ableitung nach dem Ort und zweiter partieller Ableitung nach der Zeit kann (zusammen mit (I.31)) die **Schallgeschwindigkeit** der Dehnwelle angegeben werden mit:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad c_{\text{Dehnw.}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ in Stäben}$$
$$c_{\text{Dehnw.}} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}} \text{ in Platten} \qquad \text{(I.33)}$$

Als weitere Ausbreitungsform in begrenzten Festkörpern existiert die **Torsionswelle,** bei der sich eine Drehschwingung oder Torsionsschwingung senkrecht zur Ausweitungsrichtung ausbildet, für deren Ausbreitungsgeschwindigkeit gilt:

$$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{kreisförmiger Querschnitt}$$
$$= 0.92\sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{qudratischer Querschnitt} \tag{I.34}$$

Die Transversalwelle in begrenzten Festkörpern wird als **Biegewelle** bezeichnet, weil der Festkörper (im mikroskopischen Maßstab) verbogen wird. Für einen Stab der Dicke d ergibt sich die Schallgeschwindigkeit zu:

$$c_{B\,St} = \sqrt[4]{\frac{Ed^2}{12\rho}} \cdot \sqrt{\omega} \tag{I.35}$$

Während sie sich für eine Biegewelle auf Platten

$$c_{B\,Pl} = \sqrt[4]{\frac{Ed^2}{12\left(1-\mu^2\right)\rho}} \cdot \sqrt{\omega} \tag{I.36}$$

ergibt.

Im Gegensatz zu den vorher behandelten Wellenausbreitungsformeln hängt bei dieser Wellenausbreitungsform die Schallgeschwindigkeit von der Frequenz ab, so daß eine sogenannte **Dispersion** auftritt, bei der die unterschiedlichen Frequenzen eine unterschiedliche Laufzeit von einem Ende des Festkörpers zum anderen aufweisen. Wenn also auf der einen Seite des Festkörpers ein aus mehreren Frequenzen bestehendes Wellenpaket (oder Wellengruppe) auf das Medium gegeben wird, kommt am anderen Ende des Festkörpers eine andere, unter Umständen verschmierte Form dieses Wellenpakets an, da bestimmte Frequenzen „voreilen“ und andere Frequenzen relativ spät eintreffen. Diese Dispersion ist also dadurch gekennzeichnet, daß die Phasengeschwindigkeit ungleich der Gruppengeschwindigkeit ist:

$$c_{Phase} \neq c_{Gruppe} \tag{I.37}$$

Aufgrund dieser Dispersionseigenschaft und auch der Ausbreitung von verschiedenen Wellentypen mit unterschiedlichen Laufzeiten wurden früher große Metallplatten in der Studiotechnik als **Nachhallplatten** verwendet. Bei Ihnen wurde der in natürlichen, großen Räumen durch die Reflexion auftretende Nachhall dadurch simuliert, daß innerhalb der Nachhallplatte unterschiedliche Wellenausbreitungen zwischen einem Schwingungserreger und einem an einer anderen Stelle angebrachten Schwingungsaufnehmer ausgenutzt wurden. Aufgrund der Verfügbarkeit digitaler Hallgeräte ist die Anwendung dieser z. T. sehr großen und schweren mechanischen Geräte jedoch aus der Mode gekommen.

An der Oberfläche von Festkörpern können sich sogenannte Rayleighwellen fortpflanzen, die eine Transversalwelle direkt auf der Oberfläche sind, aber nur eine begrenzte Eindringtiefe in den Festkörper besitzen. Für sie gilt:

$$c_R = \alpha\sqrt{\frac{G}{\rho}} < c_{\text{Schubwelle, }\infty\text{Festkoerper}}\text{, mit } \alpha = 0.93 \text{ für Metalle} \qquad \text{(I.38)}$$

I.3 Wellenausbreitung in Gasen und Flüssigkeiten (Longitudinalwellen)

Da in Gasen und Flüssigkeiten die mikroskopischen Partikel nicht elastisch an einen festen Ort im Raum gebunden sind, sondern sich frei bewegen können, sind in Gasen und Flüssigkeiten nur Longitudinalwellen ausbreitungsfähig. Mit diesen Longitudinalwellen werden wir uns daher im folgenden fast ausschließlich beschäftigen. Um auf die Wellengleichung und die zugehörige Schallgeschwindigkeit für die Ausbreitung von Schallwellen in Luft bzw. Flüssigkeiten zu kommen, müssen wir zunächst festhalten, daß sowohl der Druck als auch die Dichte in diesen Medien eine statische Gleichkomponente aufweist (z. B. der statische Luftdruck auf der Erdoberfläche und die zugehörige Dichte der Luft) und das durch den Schalldruck bzw. durch die Schallausbreitung hervorgerufene Dichteänderungen sich als (u. U. sehr kleine) Wechselgröße auf diese statischen Werte aufaddieren:

$$p(\underline{x}, t) = p_{-} + p_{\sim} \qquad \text{(I.39)}$$

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho_{-} + \rho_{\sim} \qquad \text{(I.40)}$$

Dabei hängt sowohl der Druck als auch die Dichte vom Ort $\underline{x}$ und der Zeit t ab. Um die Schallausbreitung vollständig zu beschreiben, benötigen wir noch die **Schallschnelle**, d. h. den vom Ort $\underline{x}$ und der Zeit t abhängigen Vektor $\underline{v}(\underline{x},t)$, der die Wechsel-Geschwindigkeitskomponente der an der Schallausbreitung beteiligten Teilchen kennzeichnet.

Um nun zur Wellengleichung zu kommen, betrachten wir wieder ein infinitesimales Volumenelement, auf das als Kraft gerade der Gradient des Schalldrucks wirkt (d. h. die lokale Änderung des Schalldruckes), und bei dem aufgrund des Newton'schen Gesetzes die Beschleunigung als zeitliche Ableitung der Schnelle auftritt. Die Masse dieses Volumenelements wird durch die Dichte ρ beschrieben, also:

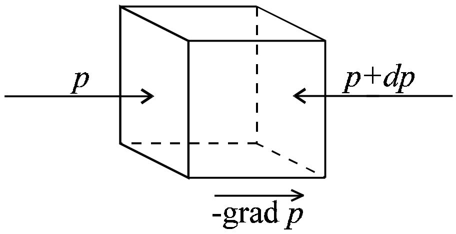

Abbildung 1.8: Infinitesimales Volumenelement eines Gases oder einer Flüssigkeit

$$\underbrace{-\mathrm{grad}\ \mathrm{p}}_{\text{Kraft}} = \underbrace{\rho}_{\text{Masse}} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\underline{\mathrm{v}}}_{\text{Beschleunigung}} = \rho \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t}\underline{\mathrm{v}} + \left(\underline{\mathrm{v}} \cdot \mathrm{grad}\right)\underline{\mathrm{v}}\right] \tag{I.41}$$

Diese Kraftgleichung auf das infinitesimale Volumenelement wird als **Eulersche Gleichung** bezeichnet. Weiterhin benötigen wir die **Kontinuitätsgleichung,** die die aus einem Volumenelement dV herausströmende Masse proportional zu der Dichteänderung in diesem Volumen-Element setzt:

$$\underbrace{\mathrm{div}(\rho \cdot \underline{\mathrm{v}})}_{\substack{\text{aus dV herausströmende}\\ \text{Masse}}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}\rho}_{\text{Dichteänderung}} \tag{I.42}$$

Als dritte Gleichung benötigen wir eine Beziehung zwischen dem Schall-Wechseldruck und dem Wechselanteil der Dichte ρ, die in dem oben behandelten Fall des Festkörpers gerade durch die elastischen Konstanten des Festkörpers gegeben wurde. Diese Proportionalität wird beschrieben als

$$\mathrm{p}_{\sim} = \mathrm{c}^2 \cdot \rho_{\sim} \tag{I.43}$$

Bei Gasen wird diese Proportionalität zwischen komprimierenden Druck und Zunahme der Dichte durch die adiabatische Zustandsgleichung gegeben, also

$$p \cdot V^{\kappa} = \text{const.} \tag{I.44}$$

Aus der adiabatischen Zustandsgleichung folgt:

$$\begin{gathered} \frac{dp}{dV} = -\kappa \cdot \frac{p}{V}, \quad \rho = \frac{\text{const.}}{V} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \\ \Rightarrow dp = \kappa \cdot \frac{p}{\rho} \cdot d\rho \end{gathered} \tag{I.45}$$

$$c_{Gas} = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p_-}{\rho_-}} \tag{I.46}$$

κ bezeichnet dabei den adiabatischen Expansionskoeffizienten und p_- und ρ_- die Gleichanteile von Druck bzw. Dichte des Gases. In Flüssigkeiten ist die Proportionalität zwischen Durckerhöhung und Volumenverringerung gerade durch den Kompressionsmodul gegeben, also:

$$\begin{gathered} K = -\Delta p \cdot \frac{V}{\Delta V} = p_{\sim} \cdot \frac{\rho_-}{\rho_{\sim}} \\ \Rightarrow c_{Flüss} = \sqrt{\frac{K}{\rho_-}} \end{gathered} \tag{I.47}$$

Um nun zur Wellengleichung zu gelangen, wenden wir den Divergenz-Operator auf die Eulersche Gleichung an, sowie eine partielle zeitliche Differentiation auf die Kontinuitätsgleichung

Also:

$$\text{div} \cdot \text{grad}\, p_{\sim} = -\text{div}\left(\rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{v}\right) - \underbrace{\text{div}\left[\rho \cdot \left(\underline{v} \cdot \text{grad}\right)\underline{v}\right]}_{\text{vernachlässigen}} \tag{I.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\left(\rho \cdot \underline{v}\right)\right) = \underbrace{\text{div}\left(\frac{\partial \rho_-}{\partial t} \cdot \underline{v}\right)}_{\substack{\text{vernachlässigen,} \\ \text{da } \rho_{\sim} << \rho_-}} + \text{div}\left(\rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{v}\right) = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{I.49}$$

Unter Vernachlässigung der konvektiven Terme in Gleichung (I.48) und des ersten Terms in Gleichung (I.49), können wir dann beide Gleichungen zusammenfassen zur **Wellengleichung:**

$$\Delta p_{\sim} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 p_{\sim} \tag{I.50}$$

Die allgemeinste Lösung der Wellengleichung hat die Form:

$$p(\underline{x}, t) = p_0 \cdot g\left(t \pm \frac{|\underline{x} - \underline{x}_0|}{c}\right) \tag{I.51}$$

D. h. eine beliebige „Störung“, die sich mit der Geschwindigkeit c in ±x-Richtung ausbreitet, ist eine Lösung der Wellengleichung. Da es sich um eine lineare, homogene Gleichung handelt, ist aber auch eine beliebige Linear-Kombination von Lösungen der Wellengleichung eine weitere Lösung der Wellengleichung. Daher bietet es sich an, jede mögliche Lösung der Wellengleichung als Linearkombination von **elementaren Wellen** zu beschreiben, d. h. ebenen, fortschreitenden Wellen mit der Kreisfrequenz ω und der Ausbreitungsrichtung $\underline{k}/|k|$, deren Zeitfunktion proportional zu dem Realteil von $e^{-i(\omega t + k \cdot x)}$ ist, also:

$$p(\underline{x}, t) = \mathrm{Re}\left\{P(\underline{k}, \omega) \cdot e^{-i(\omega t + \underline{k} \cdot \underline{x})}\right\} \tag{I.52}$$

Diese elementare Lösung beschreibt also eine sinusförmig in $\underline{k}$-Richtung fortschreitende, ebene Welle mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$ (f = Frequenz). Dabei muß der Betrag des **Wellenvektors** $\underline{k}$ die folgende Bedingung aufweisen:

$$|\underline{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{I.53}$$

$P(\underline{k}, \omega)$ beschreibt damit die Amplitude dieser Elementarwelle, die zugleich die Phaseninformation enthalten kann, wenn man $P(\underline{k}, \omega)$ ebenfalls als komplexe Zahl wählt und als physikalische Größe nur den Realteil der Welle nach Gleichung (I.52). Damit läßt sich jedes beliebige Feld von Wellen zerlegen in Elementarwellen $p(\underline{x}, t)$, die sich jeweils eindeutig durch die Amplituden $P(\underline{k}, \omega)$ festlegen lassen. Diese Beziehung zwischen der Darstellung des Wellenfeldes im Orts-Raum und als Funktion der Zeit $p(\underline{x}, t)$ und der dazu äquivalenten Darstellung des Wellenfeldes als Funktion des Wellenvektors $\underline{k}$ und der (Kreis-)Frequenz ω stellt gerade die **Fouriertransformations-Beziehung** dar:

$$p(\underline{x},t) = \iint P(\underline{k},\omega) \cdot e^{-i(\omega t + \underline{k}\,\underline{x})} d\underline{k}\, d\omega \tag{I.54}$$

$$P(\underline{k},\omega) = \frac{1}{2\pi} \iint p(\underline{x},t) \cdot e^{i(\omega t + \underline{k}\,\underline{x})} d\underline{x}\, dt \tag{I.55}$$

$p(\underline{x}, t)$ und $P(\underline{k}, \omega)$ lassen sich also eindeutig auseinander hervorrechnen. Diese Art der äquivalenten Beschreibung wird auch in der Quantenmechanik zur Beschreibung von Zuständen angewand, die entweder im Ortsraum oder im Impulsraum dargestellt werden, wobei der Impuls gerade den Wellenvektor multipliziert mit $\hbar$ entspricht.

Für den Fall der Akustik sind die folgenden Spezialfälle von Wichtigkeit:

Fall A:

Ort $\underline{x}$ und Raumfrequenz $\underline{k}$ sind fest vorgegeben. In diesem Fall interessiert nur die Zeitfunktion p(t) und das zugehörige Spektrum P(ω), weil beispielsweise nur das Schallfeld an einem festen Ort betrachtet wird und die Richtungsabhängigkeit des Schallfeldes keine Rolle spielt. Dies kann beispielsweise für ein Mikrophon der Fall sein, das an einem festen Ort steht und empfindlich für alle Schalleinfallsrichtungen ist (Kugelcharakteristik).

Fall B:

Zeitpunkt t und Frequenz ω sind vorgegeben. In diesem Fall wird für eine vorgegebene Frequenz zu einem „eingefrorenen Zeitpunkt“ die räumliche Verteilung des Schalldrucks $p(\underline{x})$ betrachtet, die als Fouriertransformierte zur **Raumfrequenz-Verteilung** $P(\underline{k})$ aufgefaßt werden kann. Die verschiedenen Wellenvektoren k werden auch als Raumfrequenzen bezeichnet, weil hohe Beträge von k zu kleinen Wellenlängen gehören, was in ähnliche Weise für hohe zeitliche Frequenzen gilt. Da die Wellenvektoren k jedoch auch immer eine räumliche Komponente aufweisen, ist diese Analogie zu der eindimensionalen Frequenz nur sehr begrenzt zu ziehen. Ein Beispiel für diesen Fall bietet die Schalldruckverteilung, die ein Lautsprecher in einen bestimmten Raum für eine bestimmte Abstrahlfrequenz hervorruft. Dabei interessiert weniger das zeitliche Signal, dafür aber mehr die Orts- und Richtungsabhängigkeit des Schallfeldes.

I.4 Wellenwiderstand/Reflexion

Um den Zusammenhang zwischen dem Schalldruck und der Schallschwelle aufzeigen zu können, gehen wir von einer beliebigen Schalldruckwelle

$$p = g(\omega t + \underline{k}\underline{x}) \tag{I.56}$$

aus. Für diese allgemeine Lösung der Wellengleichung gilt aufgrund der Eulerschen Gleichung (I.41):

$$-\text{grad } p = -g'(\omega t + \underline{k}\underline{x}) \cdot \underline{k} = \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{v} \tag{I.57}$$

Durch zeitliche Integration ergibt sich damit für die Schnelle:

$$\underline{v} = -\frac{\underline{k}}{\omega\rho} g(\omega t + \underline{k}\underline{x}) \tag{I.58}$$

Durch Einsetzen von g(ωt + $\underline{k}\underline{x}$) ergibt sich dann:

$$|\underline{v}| = \frac{1}{\rho c} \cdot p \tag{I.59}$$

Dabei ist der Betrag von $\underline{v}$ im Sinne eines vektoriellen Betrags zu verstehen, da Schalldruck und Schallschnelle zeitlich nicht unbedingt in Phase sein müssen. Dies läßt sich dadurch ausdrücken, daß die Proportionalitätskonstante zwischen (räumlichen) Betrag der Schallschnelle und dem Schalldruck eine komplexe Größe ist. Diese Proportionalitätskonstante zwischen Schalldruck und Schnelle wird als **Wellenwiderstand** bezeichnet:

$$Z = \frac{p_\sim}{|\underline{v}_\sim|} = \rho \cdot c \tag{I.60}$$

Der Ausdruck „Widerstand“ soll damit die Analogie zum elektrischen Widerstand R = U/I signalisieren, da die Spannung ähnlich wie der Schalldruck mit der Kraft zusammenhängt und die Schnelle mit einem Teilchenstrom.

Der Wellenwiderstand spielt eine wichtige Rolle bei der Reflexion einer fortschreitenden Welle bei dem Übergang von einem Medium mit dem Wellenwiderstand Z in ein anderes Medium mit dem Wellenwiderstand Z_w. Unter der Annahme, daß die einfallende Welle den Schalldruck p_e und die Schnelle v_e aufweist, sowie die reflektierte Welle die entsprechenden Größen p_r und v_r und die weitergeleitete Welle die Größen p_w und v_w, gilt für die Schalldrücke eine skalare Addition (d. h. $p_e + p_r = p_w$, während für die Schallschnellen eine vektorielle Addition ($v_e - v_r = v_w$) resultiert. Unter der Annahme, daß der Schall senkrecht auf die Begrenzungsfläche einfällt, so daß der reflektierte Schall um 180 Grad seine Richtung ändert und der weitergeleitete Schall in der gleichen Richtung wie der einfallende Schall sich weiter ausbreitet, gilt dann:

$$Z_w = p_w / |v_w| = Z(p_e + p_r) / (p_e - p_r) \tag{I.61}$$

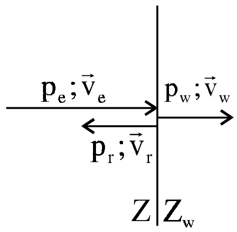

Abbildung 1.9: Senkrechter Einfall von Schall auf eine Grenzfläche zwischen einem Medium mit Wellenwiderstand Z (links) und Wellenwiderstand Z_w (rechts)

Falls die Einfallsrichtung nicht senkrecht auf der Begrenzungsfläche steht, gelten die Gesetzesmäßigkeiten des Brechungsgesetzes (vgl. Kapitel II). Mit Hilfe der Gleichung I.61 und den vorhergehenden Annahmen läßt sich der **Reflexionsfaktor r** angeben als das Verhältnis des Schalldrucks der reflektierten Welle zum Schalldruck der einfallenden Welle, also:

$$r = p_r / p_e = (Z - Z_w) / (Z + Z_w) \tag{I.62}$$

Je nach Verhältnis zwischen Z und Z_w kann r verschiedene Werte zwischen +1 und -1 annehmen, die u. U. auch komplex sind (d. h. wenn eine Phasenverschiebung zwischen einfallender und reflektierter Welle auftritt, die ungleich 0 oder ungleich π ist). Für den Fall eines **schallharten Übergangs** ($Z_w \approx \infty$) ergibt sich ein Reflexionsfaktor r = -1, d. h. sämtlicher Schall wird reflektiert und eine Phasendrehung der Schalldruckwelle um 180 Grad findet statt. Ähnlich sind die Verhältnisse beim **schallweichem Übergang** ($Z_w \cong 0$), bei dem ein Reflexionsfaktor r = +1 auftritt, so daß sämtliche Schallenergie reflektiert wird und kein Phasensprung der Schalldruckwelle auftritt. Für den Fall gleicher Wellenwiderstände (Z_w = Z) beträgt der Reflexionsfaktor r = 0, d. h. es treten keinerlei Reflexionen auf und der Schall wird ohne Energieverluste in das Medium 2 weitergeleitet. Wenn man an einer möglichst verlustfreien Überleitung der Schallenergie von einem Medium an das andere Medium interessiert ist, sollte daher der Wellenwiderstand möglichst gut einander angeglichen werden. Ein Beispiel für eine relativ schlechte Anpassung ist das Verhältnis aus dem Wellenwiderstand von Wasser, der den Wert $Z = 1{,}48 \cdot 10^{6}$ kg $m^{-2}s^{-1}$ annimmt, während Luft einen Wellenwiderstand $Z = 414$ kg $m^{-2}s^{-1}$ aufweist. Als Reflexionsfaktor ergibt sich damit r = 0,9994, d. h. fast die gesamt Schallenergie wird an der Grenzfläche zwischen Luft und Wasser reflektiert und nur ein kleiner Anteil (Abschwächung um den Faktor 3.000, entsprechend etwa 29 dB Abschwächung) wird durchgelassen. Aus diesem Grund ist im Wasser der über dem Wasser in der Luft fortgeleitete Schall nur sehr schwer hörbar und umgekehrt. Im Ohr besteht das Problem, die in Luft fortgeleiteten Schallwellen in das mit Flüssigkeit gefüllte Innenohr zu übertragen. Damit dieses möglichst verlustfrei und ohne Reflexionen geschehen kann, tritt das Mittelohr in Aktion, daß eine Impedanztransformation etwa um einen Faktor 40 bewirkt und damit die potentiell starke Abschwächung beim Übergang zwischen Luftschall und Schall im Innenohr stark reduziert.