

Vorwort

Das Messen und Erfassen physikalischer Größen tritt in allen Teilgebieten der Physik auf. Dabei sind die zugrundeliegenden Phänomene sehr unterschiedlich, die grundlegenden Techniken der Meßwertaufnahme ähneln allerdings sehr. Typischerweise wird ein (zeitlich variabler) Meßwert gesucht, dem ein statistischer Meßfehler überlagert ist. Diese zusammengesetzte Größe bildet das Meßsignal, d. h. eine zeitlich variable Größe, die von einem Meßgerät erfaßt und der anschließenden Auswertung (z. B. mit einem Computer) zur Verfügung steht.

In der vorliegenden Vorlesungsausarbeitung wollen wir uns den Grundlagen und einigen Anwendungen dieser insbesondere für die Experimentalphysik wichtigen Fragestellung widmen. Dabei soll zunächst die Charakterisierung des zugrundeliegenden Signals beschrieben werden, die üblicherweise in der (linearen) Signal- und Systemtheorie behandelt wird. Anschließend werden die auftretenden Meßfehler charakterisiert, in dem die grundlegenden Eigenschaften von Zufallsvariablen und eines stochastischen Prozesses behandelt werden. Zusammen mit der vorherigen Charakterisierung von allgemeinen Signalen kann dies umgesetzt werden in einer Analyse von Rauschvorgängen und einer Beschreibung von Rauschen in physikalischen Systemen. Als nächstes steht der eigentliche Meßvorgang im Vordergrund, bei dem Beispiele experimenteller Meßwertfassung (Mikrofon, Photodiode, ...), sowie Möglichkeiten der analogen Signalverarbeitung behandelt werden. Da aufgrund des Siegeszugs der Computertechnik die Digitalisierung der Daten eine Selbstverständlichkeit in der Praxis darstellt, wird auch die Digitalisierung als Teil der Signalaufnahme behandelt. Anschließend wird die digitale Signalverarbeitung mit diesen digitalisierten Signalen behandelt, wobei Standardtechniken wie die diskrete Fouriertransformation, Zeit/Frequenzanalyse und digitale Filter eingesetzt werden sollen.

Bei der Ausarbeitung des vorliegenden Skripts haben Karin Bramstedt, Jan Kickstein und Oliver Wegner tatkräftig mitgewirkt. Ihnen gebührt mein herzlicher Dank.

Oldenburg, September 1995

Birger Kollmeier

Gliederung

I Charakterisierung von Signalen

- I.1 -Faltung/Filterung
- I.2 -Fouriertransformation
- I.3 -Energiespektrum , Korrelation
- I.4 -Laplace-Transformation
- I.5 -Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktion

II Charakterisierung von Meßfehlern

- II.1 -Zufallsvariable u. Verteilungen
- II.2 -Summen von Zufallsvariablen, Zentraler Grenzwertsatz
- II.3 -Statistik
- II.4 -Stochastischer Prozeß
- II.5 -Rauschen in physikalischen Systemen

III Erfassung physikalischer Signale

- III.1 -Beispiel: Mikrophon
- III.2 -Fotodiode
- III.3 -Vorverarbeitung
- III.4 -Digitalisierung
- III.5 -Rekonstruktion eines digitalisierten Signals
- III.6 -Anpassung von Daten an eine Modellfunktion
- III.7 -Minimierung in M Dimensionen

IV Digitale Signalverarbeitung

- IV.1 -Diskrete Spektralanalyse
- IV.2 -Zeit-Frequenz-Analyse
- IV.3 -Digitale Filter
- IV.4 -Entwurf („Design“) digitale Filter

I. Charakterisierung von Signalen

Das von einem Meßgerät aufzunehmende Signal $s(t)$ kann als eine reelle, zeitlich variierende Größe (d. h. eine reellwertige Funktion der Zeit) aufgefaßt werden. Diese Größe repräsentiert physikalische Größen wie z. B. Spannung, Strom, Temperatur u. ä.. Ihre Momentanleistung sei definiert als $s^2(t)$, d. h. etwaige Proportionalitätskonstanten sind entsprechend normiert worden (beispielsweise wäre die Leistung bei einer Spannungsmessung gleich U^2 / R bzw. bei einer Strommessung $I^2 \cdot R$, so daß $R = 1$ gesetzt wird). Bei dem zu betrachtenden Signal soll es sich in der Regel um ein **Energiesignal** handeln, d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty \quad (1.1)$$

Die meisten der elementaren Zeitfunktionen (wie z. B. sinus, cosinus, periodisches Rechteck...) sind jedoch keine Energiesignale, da sie in der Idealisierung unendlich lang sind und ihr Quadratintegral nicht konvergiert. Man bezeichnet sie jedoch als **Leistungssignale**, d. h.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt < \infty \quad (1.2)$$

Da es in der Praxis leichter ist, den Grenzübergang nicht jedesmal mitzubetrachten, wird im folgenden in der Regel von Energiesignalen ausgegangen, in denen bei Leistungssignalen gegebenenfalls der gegen $T = +\infty$ und $T = -\infty$ laufende Teil des Signals „abgeschnitten“ wird. Der dann notwendige Grenzübergang für $T \rightarrow \infty$ wird dann implizit vorausgesetzt.

I.1 Filterung/Faltung

Eine elementarer Schritt für die Analyse bzw. Verarbeitung von Signalen ist das Filtern eines Signals mit einem **linearen, zeitinvarianten System** (LTI-System). Das Signal $s(t)$ wird in einen Filter H hereingegeben, aus dem das Ausgangssignal $y(t)$ herauskommt.

H ist linear d. h.

$$H(\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)) = \alpha H(s_1(t)) + \beta H(s_2(t)) \quad (1.3)$$

H ist zu dem zeit-invariant (Time-Invariant), d. h.

$$H(s(t-T)) = Y(t-T) \quad \forall T \quad (1.4)$$

d. h. der Ausgang des Systems ist immer derselbe, unabhängig von einer etwaigen Vorgeschichte oder von der „Tagesform“ des Systems. Um die generelle Form von $Y(t)$ in Abhängigkeit von $s(t)$ zu errechnen, zerlegen wir $s(t)$ in Rechtecke, die im Grenzübergang zu δ -Pulsen werden:

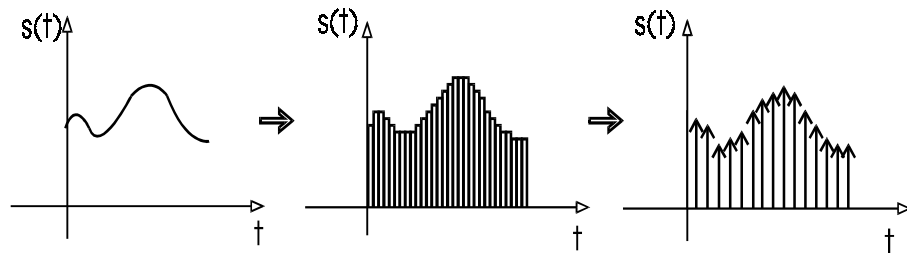


Abb. 1.1: Signal $s(t)$ zerlegt in Rechtecke und im Grenzübergang in δ -Pulse

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} s(nT) \cdot \text{rect}_T(t - nT) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (1.5)$$

Die δ -Funktion ist dabei als verallgemeinerte Funktion (Distribution), also als Grenzwert definiert:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}_T(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) x(t) dt = x(t=0) \quad (1.6)$$

Dabei gilt für die Dimension $[\delta(t)] = \text{Dimension } [t]^{-1}$.

Aufgrund der Linearität und der Zeit-Invarianz kann nun die Antwort des Systems H auf das Eingangssignal $s(t)$ dadurch zusammengesetzt werden, daß das Eingangssignal in zeitversetzte δ -Impulse zerlegt wird und die System-Antworten auf diese δ -Impulse aufintegriert werden:

$$H(s(t)) = H\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) H(\delta(t - \tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1.7)$$

$h(t-\tau)$ bezeichnet die **Impulsantwort** des Systems, d. h. $h(t-\tau) = H(\delta(t-\tau))$.

Als Ausgangssignal $y(t)$ ergibt sich die **Faltung** des Eingangssignals $s(t)$ mit der Impulsantwort $h(t)$. Diese Faltung wird mit dem Zeichen „*“ gekennzeichnet und ist eine Operation, die in vielen Eigenschaften einer Multiplikation zweier Funktionen ähnelt:

$$y(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad \text{Faltungsintegral} \quad (1.8)$$

Dabei ist zu beachten, daß $h(t-\tau)$ ebenfalls die Dimension $[t]^{-1}$ aufweist, damit $y(t)$ die „richtige“ Dimension $[s(t)]$ besitzt. Anschaulich bewirkt die Faltung eine gegenseitige „Verschmierung“ der beiden beteiligten Signale miteinander. Dazu wird für jede Verzögerungszeit t das eine Signal umgeklappt (d. h. zeitlich invertiert) und der „Überlapp“, d. h. das Produkt aus $s(t)$ und dem zeitlich verschobenen und gespiegeltem Signal $h(t)$ wird aufintegriert. (vgl. Lücke, 1989).

I. 2 Fouriertransformation

Wir können uns nun ein spezielles Filter so konstruiert denken, daß nur eine Frequenz „durchgelassen“ wird, d. h. das aus dem Eingangssignal nur einen periodischen Vorgang mit der Frequenz f_0 passieren läßt. Dieses Filter hätte dann als Impulsantwort eine Sinus- bzw. Cosinus-Schwingung, die gleich in der Form geschrieben werden kann: $h(t) = e^{i2\pi f_0 t}$.

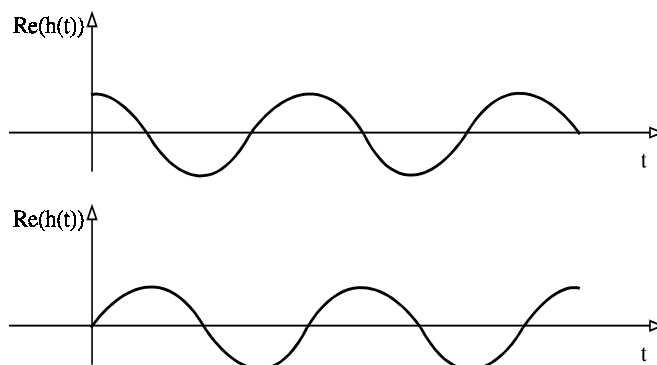


Abb. 1.2: Real- und Imaginärteil der Impulsantwort $h(t)$

Dabei handelt es sich offenbar um ein extrem scharfes Bandpaßfilter, das nur die Frequenz f_0 passieren läßt. Dieses Filter ist allerdings nicht praktisch realisierbar, weil es zum einen eine nichtkausale (d. h. vor dem Anliegen des Eingangssignals bereits beginnende) Impulsantwort aufweist

und weil diese Impulsantwort zum anderen komplex ist, d. h. zur leichteren mathematischen Beschreibung aus Real- und Imaginärteil einer periodischen Schwingung zusammengesetzt ist. Dennoch hat dieses „unrealistische“, extrem scharfe Bandpaßfilter eine wichtige Bedeutung, denn es führt zur **Fouriertransformation** für eine beliebige Frequenz f_0 :

$s(t)$ soll kontinuierliches Energie-Signal für $-\infty \leq t \leq \infty$ sein. Dann definieren wir die Fouriertransformation ($\circ \rightarrow$) wie folgt:

$$\text{Fouriertransformierte: } s(t) \circ \rightarrow \mathfrak{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2\pi i f t} dt = S(f) \quad (1.9)$$

$$\text{Fourierrücktransformation: } S(f) \bullet \rightarrow \mathfrak{F}^{-1}(S(f)) = s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{+2\pi i f t} df \quad (1.10)$$

Aufgrund der o. a. anschaulichen Bedeutung kann $S(f)$ als die (komplexe) Amplitude aufgefaßt werden, die bei Anlegen des Signals $s(t)$ an ein nicht realisierbares, beliebig scharfes Bandpaßfilter mit der Mittenfrequenz f herauskommt. Aus dem Verhältnis zwischen Imaginär- und Realteil kann auf den Phasenwinkel geschlossen werden. $S(f)$ wird auch als Spektrum von $s(t)$ bezeichnet und entspricht den Amplituden bei einer Zerlegung von $s(t)$ in komplexe Exponential-Funktionen der Form $e^{2\pi i f t}$. Umgekehrt kann also mit der Fourier-Synthese (Rücktransformation) jedes Zeitsignal $s(t)$ durch Überlagerung von komplexen Exponential-Funktionen mit der entsprechenden Amplitude $S(f)$ wieder erzeugt werden. Es besteht damit eine eindeutige Zuordnung zwischen einem Zeitsignal $s(t)$ und dem zugehörigen Spektrum $S(f)$. D. h. eine Funktion ist sowohl durch die Darstellung im Zeitbereich als auch durch ihre Fouriertransformierte, der Darstellung im Frequenzbereich, eindeutig charakterisiert. Eine Auswahl von elementaren Zeitfunktionen und ihrer Fouriertransformierten findet sich in Tabelle 1.1. Als besonders hervorzuhebene elementare Funktion sei die Sinusfunktion genannt, also

$$s(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2i} (e^{i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}) \circ \rightarrow S(f) = \frac{1}{2i} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2i} \delta(f + f_0) \quad (1.11)$$

Tabelle 1.1: Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich

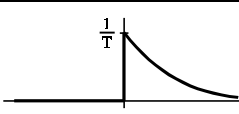
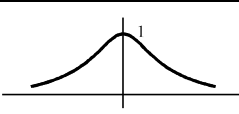
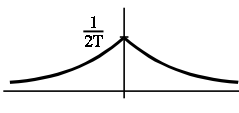
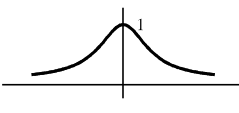
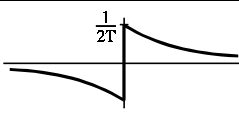
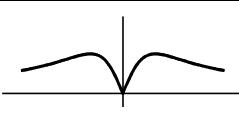
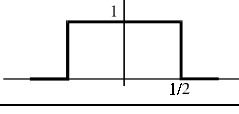
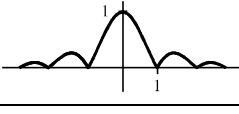
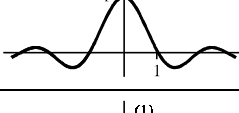
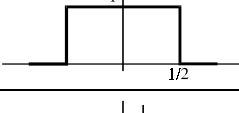
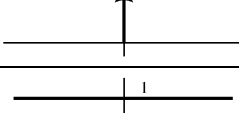
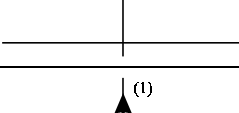
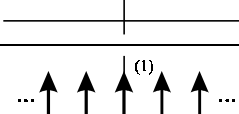
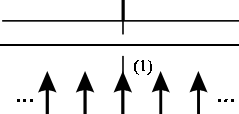
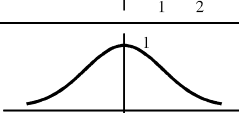
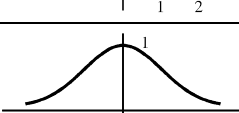
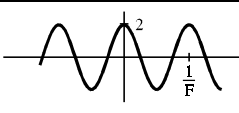
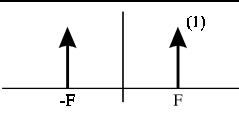
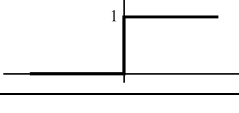
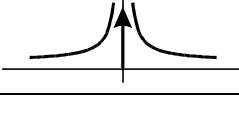
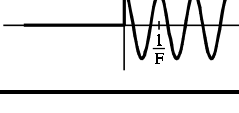
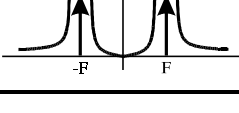


$s(t)$		$S(f)$	$ S(f) $
	$\frac{1}{T} \text{step}(t)e^{-t/T} (T > 0)$ Exponentialimpuls	$\frac{1}{1 + i2\pi Tf}$	
	$\frac{1}{2T} e^{- t /T} (T > 0)$ Doppel-exponentialimpuls	$\frac{1}{1 + (2\pi Tf)^2}$	
	$\frac{1}{2T} \text{sgn}(t) \cdot e^{- t /T}$	$-i \frac{2\pi Tf}{1 + (2\pi Tf)^2}$	
	$\text{rect}(t)$ Rechteckimpuls	$\text{sinc}(\pi f)$	
	$\text{sinc}(\pi t)$ sinc-Funktion	$\text{rect}(t)$	
	$\delta(t)$ δ -Funktion	1	
	1 Gleichstrom	$\delta(f)$	
	$\text{III}(t)$ δ -Kamm	$\text{III}(f)$	
	$e^{-\pi t^2}$ Gaußimpuls	$e^{-\pi f^2}$	
	$2 \cdot \cos(2\pi Ft)$ cos-Funktion	$\delta(f+F) + \delta(f-F)$	
	$\text{step}(t)$ Sprungfunktion	$\frac{1}{2} \delta(f) - i \frac{1}{2\pi f}$	
	$4 \cdot \text{step}(t) \cdot \cos(2\pi Ft)$ geschaltete cos-Funktion	$\delta(f + F) + \delta(f - F)$ $-\frac{i}{\pi} \frac{2f}{f^2 - F^2}$	

Tabelle 1.2: Rechenregeln und Beispiele zur Fouriertransformation

Definition:	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft} df, \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$
Kurzform:	$X(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\} \text{ bzw. } x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{X(f)\} \text{ oder } x(t) \circ \longrightarrow X(f)$
Rechenregeln:	
a) Symmetrie:	$\mathfrak{F}\{X(f)\} = \mathfrak{F}^2\{x(t)\} = x(-t)$
b) Linearität:	$\mathfrak{F}\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} = c_1 \mathfrak{F}\{x_1(t)\} + c_2 \mathfrak{F}\{x_2(t)\} \quad c_1, c_2 \text{ const}$
c) Differentiationsregeln:	$\mathfrak{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (i2\pi f)^n X(f)$ $\mathfrak{F}\{(-i2\pi f)^n x(t)\} = \frac{d^n X(f)}{df^n}$
d) Integrationsregeln:	$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(t') dt'\right\} = \frac{1}{i2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t') dt' \right] \delta(f)$ $\mathfrak{F}\left\{-\frac{1}{i2\pi f} x(t)\right\} = \int_{-\infty}^f X(f') df' - \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f') df' \right]$
e) Verschiebungsregeln:	$\mathfrak{F}\{x(t + t_0)\} = e^{i2\pi f t_0} X(f)$ $\mathfrak{F}\{e^{-i2\pi f_0 t} x(t)\} = X(f + f_0), \quad t_0, f_0 \text{ reell, const}$
f) Skalierungsregel:	$\mathfrak{F}\{x(\lambda t)\} = \frac{1}{ \lambda } X\left(\frac{f}{\lambda}\right), \quad \lambda \text{ reell, const}$
g) Faltungssätze:	$\mathfrak{F}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \mathfrak{F}\{x_1(t)\} * \mathfrak{F}\{x_2(t)\}$ $\mathfrak{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathfrak{F}\{x_1(t)\} \cdot \mathfrak{F}\{x_2(t)\}$
Beispiele:	
a) δ -Funktion:	$\delta(t) \circ \longrightarrow 1, \quad \dim[\delta(t)] = \dim[t^{-1}]$
b) Gaußfunktion:	$\text{gauß}_\tau(t) = e^{-(t/\tau)^2} \circ \longrightarrow \tau\sqrt{\pi} e^{-\pi f^2 \tau^2}; \quad (\text{Varianz} = \tau^2 / 2)$
c) Sprungfunktion:	$\text{step}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' \circ \longrightarrow \frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$
d) Rechteckfunktion:	$\text{rect}_\tau(t) = \begin{cases} 1, & t < \tau/2 \\ 0, & t > \tau/2 \end{cases} = \text{step}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \text{step}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \circ \longrightarrow \frac{e^{i\pi f \tau} - e^{-i\pi f \tau}}{i2\pi f \tau} = \tau \text{sinc}(\pi f \tau)$
e) periodische Funktion:	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{i2\pi n t/T} \circ \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$
f) δ -Kamm:	$\text{lll}_T(t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \delta(t - vT) \circ \longrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \text{lll}_{1/T}(f)$
g) periodisch wiederholte Funktion:	$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} x(t - vT) = x(t) * \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \delta(t - vT) \circ \longrightarrow \frac{X(f)}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

Aufgrund der Eulerschen Zerlegung des Sinus in zwei komplexe Exponentialfunktionen, die jeweils konjugiert komplex zueinander sind, er-

kennt man bereits zwei grundlegende Eigenschaften der Fouriertransformation: Sie beschreibt, aus welcher Linear-Kombination von komplexen Exponentialfunktionen ein Zeitsignal zusammengesetzt werden kann. Weil das Zeitsignal reell ist, muß bei der Fourier-Synthese (d. h. Rücktransformation) der Imaginärteil des Spektrums sich genau wegheben. Daher tritt zu jeder Komponente im Spektrum ihre konjugiert komplexe Komponente bei negativen Frequenzen auf. Die negativen Frequenzen in der Fouriertransformation haben daher den Sinn, als konjugiert-komplexe Spektralanteile zusammen mit den bei positiven Frequenzen vorliegenden Anteilen gerade zu einem reellen Signal zu führen. Wenn dieses Signal wie im Fall des Sinus eine punktsymmetrische Funktion bezüglich des Zeitnullpunkts darstellt, ist das Spektrum rein imaginär und die Anteile bei positiven Frequenzen entsprechen genau den negativen Anteilen bei negativen Frequenzen. Ist dagegen das Zeitsignal spiegelsymmetrisch bezüglich des Zeitursprungs (wie z. B. im Fall des Cosinus, „gerade“) ist das Spektrum rein reell und die Spektralanteile bei positiven Frequenzen sind gleich den Spektralanteilen bei negativen Frequenzen.

Eine weitere wichtige elementare Funktion ist die δ -Funktion:

$$s(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \longleftrightarrow \quad S(f) = 1 \quad (I.12)$$

Die Fouriertransformierte eines δ -Pulses ist also eine Konstante. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Fouriertransformation und der Normierungsbedingung für die δ -Funktion. Wird dagegen eine δ -Funktion periodisch wiederholt, so erhält man den sogenannten δ -Kamm, der auch mit dem russischen Buchstaben $\square\square$ (Scha) bezeichnet wird:

$$s(t) = \square\square_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \longleftrightarrow \quad S(f) = \square\square_{1/T}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (I.13)$$

Der δ -Kamm ist damit eine Eigenfunktion der Fouriertransformation, d. h. er geht durch die Fouriertransformation wieder in sich über, wobei allerdings der Maßstab verändert wird. Wenn die einzelnen δ -Pulse im Zeitbereich eng zusammenrücken, entspricht dies einer kurzen Periodendauer und einer hohen Grundfrequenz. Im Spektralbereich rücken daher die δ -Pulse auseinander, um ein konstantes Linienspektrum zu formen. Bei diesem harmonischen Linienspektrum tritt also die Grundfrequenz (d. h. die Wiederholungsfrequenz $1/T$) mit ihren ganzzahligen Vielfachen als Harmonische mit konstanter Amplitude auf.

Diese Eigenschaft des δ -Kamms weist bereits auf eine wichtige generelle Eigenschaft der Fouriertransformation hin: Wenn die Zeitachse um den Faktor a „gestaucht“ wird, wird die Frequenzachse um denselben Faktor „gedehnt“:

$$s(a \cdot t) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right) \quad (I.14)$$

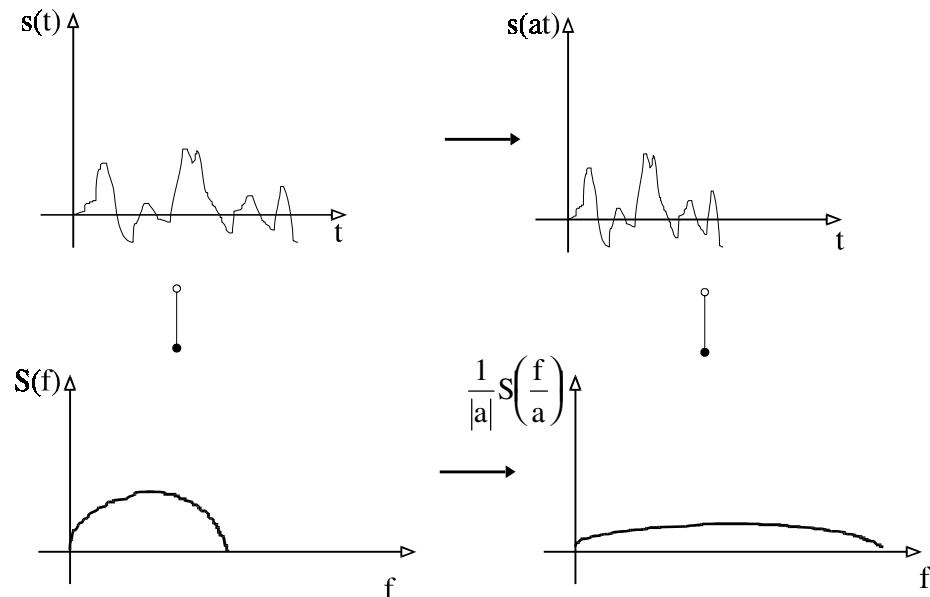


Abb. 1.3: Zeitachse mit a gestaucht, Frequenzachse mit dem Faktor a gedehnt

Der Vorfaktor $1/a$ ist notwendig, um die Gesamtenergie sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich konstant zu halten (siehe unten).

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Fouriertransformation bezieht sich auf die bereits oben besprochene Faltung: Im **Faltungssatz** wird ausgesagt, daß die Faltung zweier Funktionen in dem einen Bereich zu einer Multiplikation der Fouriertransformationen dieser beiden Funktionen im jeweils anderen Bereich führt.

Wenn wir also das Eingangssignal $s(t)$ mit der Impulsantwort des Filters $h(t)$ falten, so entspricht das im Frequenzbereich einer Multiplikation der Fouriertransformierten von $s(t)$ mit der Fouriertransformierten von $h(t)$:

$$Y(f) = \mathfrak{F}(y(t)) = \mathfrak{F}(s(t) * h(t)) = \mathfrak{F}(s(t)) \cdot \mathfrak{F}(h(t)) = S(f) \cdot H(f) \quad (I.15)$$

Das Spektrum unseres Eingangssignals wird also mit der sogenannten

Übertragungsfunktion $H(f)$ des Filters multipliziert. Anschaulich ist diese Operation klar, denn ein Tiefpaßfilter soll ja gerade das Spektrum eines Eingangssignals so verändern, daß die tiefen Frequenzen erhalten und die hohen Frequenzen abgeschwächt werden. Dies entspricht gerade einer Multiplikation des Spektrums des Eingangssignals mit einer Übertragungsfunktion, die große Werte bei niedrigen Frequenzen und Werte in der Nähe von 0 bei hohen Frequenzen aufweist. Die übliche Bezeichnungsweise für verschiedene Filter (z. B. Hochpaß, Bandpaß, Tiefpaß oder Bandsperre) resultiert gerade aus einer derartigen Beschreibungsweise. Sie ist leichter verständlich als die Beschreibungsweise im Zeitbereich, bei der eine Faltung des Eingangssignals mit der jeweiligen Impulsantwort des Filters vorgenommen werden muß. Der o. a. Faltungssatz gilt auch umgekehrt, d. h. eine Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich. Durch diese elementaren Operationen kann die sogenannte **Faltungsalgebra** entwickelt werden, mit der sich das Spektrum eines beliebigen Signals relativ schnell und einfach berechnen läßt, in dem man das Signal als Produkt und Faltung aus elementaren Funktionen beschreibt. Da man die Fouriertransformierten dieser elementaren Funktionen kennt, läßt sich das entsprechende Spektrum der zusammengesetzten u. U. recht komplexen Funktion schnell ausrechnen und ist für die Anschauung sofort verfügbar.

In der physikalischen Meßtechnik wird anstelle der o. a. Impulsantwort oft die Sprungantwort $y_{sp}(t)$ angewandt, weil sich ein sprungförmiges Eingangssignal in der Praxis wesentlich leichter erzeugen läßt als ein δ -Puls. Wenn eine derartige Stufenfunktion an den Eingang unseres Systems mit der Impulsantwort $h(t)$ und der Übertragungsfunktion $H(f)$ angelegt wird, ergibt sich das folgende Ausgangssignal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 y_{sp}(t) & = & \text{step}(t) & * & h(t) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 Y_{sp}(t) & = & \left(\frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f) \right) \cdot H(f) & = & \frac{H(f)}{i2\pi f} + \frac{1}{2} H(0) & & (I.16)
 \end{array}$$

Der zweite Term ist der Gleichspannungsanteil der Sprungfunktion, der auch zu einem entsprechenden Gleichspannungsanteil in dem Ausgangssignal führt. Der erste Anteil entspricht gerade der durch $2\pi f$ geteilten Übertragungsfunktion des Filters. Diese Division durch $2\pi f$ kann mit den o. a. Rechenregeln zur Differentiation bzw. Integration von Funktionen so gedeutet werden, daß die Sprungfunktion ein zeitliches Integral der δ -Funktion darstellt. Im Frequenzbereich wird diese Integration im Zeitbereich gerade zu einer Division durch die Frequenz f . Die Sprungantwort

eines Systems ist demnach eine tiefpaßgefilterte Version der Übertragungsfunktion des Systems. Diese kann einfach durch Multiplikation des Spektrums der Sprungantwort mit $2\pi f$ rekonstruiert werden.

Übungsaufgaben:

1.) Berechne das Spektrum einer Dreiecksfunktion, die von $-T$ bis 0 linear von 0 auf den Wert 1 ansteigt und dann in dem Bereich von 0 bis $+T$ auf den Wert 0 wieder abfällt (Hinweis: Dreiecksfunktion entsteht durch Falten zweier Rechtecksignale im Zeitbereich).

2.) Spektrum eines periodisch wiederholten Sinus-Impulses, der jeweils für die Länge T angeschaltet und für die Zeitdauer T ausgeschaltet wird (Hinweis: Läßt sich als Multiplikation eines Rechtecks mit einem Sinus sowie Faltung dieser Funktion mit einem δ -Kamm der Periode aus $2T$ auffassen.)

I. 3 Energiespektrum, Korrelation

Im folgenden wollen wir die Korrelation als Ähnlichkeitsmaß zweier Signale kennenlernen, die insbesondere für die Charakterisierung von Zufallssignalen und Rauschen in physikalischen Systemen eine große Rolle spielt. Wenn wir wieder annehmen, daß $s(t)$ ein Energiesignal ist, d. h.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty \quad (I.17)$$

dann wird die **Autokorrelations-Funktion** für das Energiesignal definiert als:

$$\varphi_{ss}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau) dt = s(t)s(-t), \quad E = \varphi_{ss}^E(0) = s(t)*s(-t)|_{\tau=0} \quad (I.18)$$


Die Autokorrelationsfunktion mißt demnach den „Überlapp“ des Original-Signals mit der um die variable Zeit verschobenen Version desselben Signals, indem das Integral über das Produkt gebildet wird. Stimmt die verschobene Version des Signals mit dem Originalsignal exakt überein, wird diese Funktion maximal. Falls $s(t)$ im zeitlichen Verlauf keine Ähnlichkeit mit sich selbst aufweist (z. B. keine periodische Funktion ist) fällt $\varphi_{ss}^E(\tau)$ mit zunehmender Verschiebung τ ab. Analog wird die **Kreuzkorrelations-**

funktion zwischen den Signalen $s(t)$ und $g(t)$ definiert als:

$$\varphi_{sg}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t + \tau) dt = s(\tau) * g(-\tau) \quad (I.19)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion ist damit formal sehr ähnlich der Faltung von s und g , allerdings muß hier nicht wie bei der Faltung eine der beiden Funktionen zunächst in der Zeitachse gespiegelt werden. Daher kann man die Korrelation auch als Faltung mit der zeitgespiegelten Partnerfunktion auffassen. Da diese Zeitspiegelung im Frequenzbereich einem Übergang zum konjugiert-Komplexen entspricht, tritt die folgende Beziehung zwischen der Autokorrelationsfunktion und dem Energie-Spektrum auf, die als **Wiener-Khintchine-Theorem** bezeichnet wird:


$$\varphi_{ss}^E(\tau) = s(\tau) * s(-\tau)$$



$$S(f) \cdot S^*(f) = |S(f)|^2 \quad (I.20)$$

Das Energiespektrum ist dabei eine reelle, positive Größe, bei der die Phaseninformation des ursprünglichen Spektrums verlorengeht. Aus dem Energiespektrum bzw. aus der Autokorrelationsfunktion kann daher nicht das Originalsignal rekonstruiert werden: Im Spektralbereich geht die Phaseninformation verloren und im Zeitbereich geht die zeitliche Verschiebung verloren (d. h. eine zeitliche Verschiebung des zu analysierenden Signals ergibt dieselbe Autokorrelationsfunktion). Eine entsprechende Beziehung gilt für die Kreuzkorrelationsfunktion:

$$\varphi_{sg}^E(\tau) = s(\tau) * g(-\tau)$$



$$S(f) \cdot G^*(f) \quad (I.21)$$

Dieses Kreuzenergiespektrum liefert als Realteil die Anteile von $g(t)$, die mit $s(t)$ korreliert sind und somit eine gewisse Ähnlichkeit aufweisen. Als Imaginärteil tauchen die nicht-korrelierten Anteile von $s(t)$ und $g(t)$ auf.

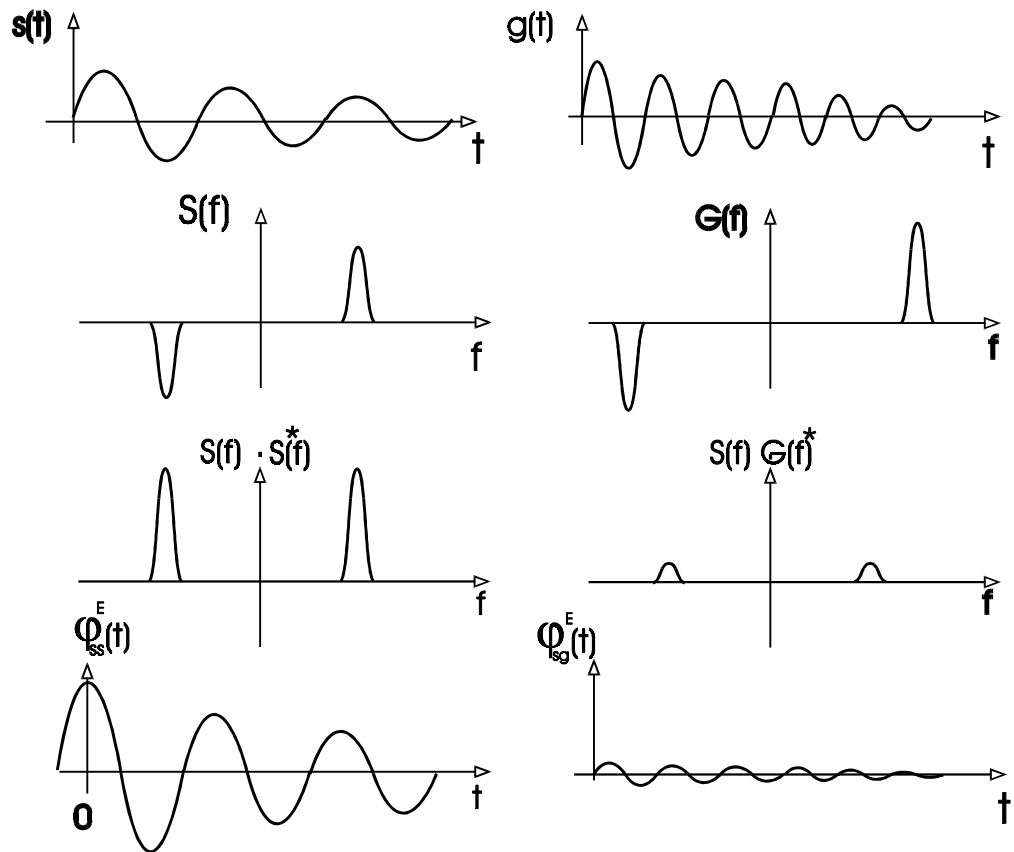


Abb.1.4: Korrelationsfunktion als Maß für die Ähnlichkeit, die Phaseninformation geht verloren

Ein wichtiger Spezialfall des Wiener-Kchintchine-Theorems tritt für den Fall $\tau=0$ auf, in dem die Rücktransformation des Energiespektrums für diesen Zeitpunkt betrachtet wird:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \varphi_{ss}^E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (1.22)$$

Dieses Theorem sagt aus, daß die Gesamt-Energie des Signals, die durch Integration im Zeitbereich ermittelt wird, genau der Gesamt-Energie des Signals entspricht, die durch Integration im Frequenzbereich ermittelt werden kann. Allein aufgrund dieser energetischen Betrachtungen ist die bereits oben erwähnte Skalierungseigenschaft der Fouriertransformation notwendig, die bei einer Stauchung der Zeitachse eine Streckung der Frequenzachse mit entsprechender Multiplikation des Spektrums vorsieht. Während die Autokorrelationsfunktion zur Zeitverschiebung 0 gerade die Energie des Signals angibt, ergibt die Kreuzkorrelationsfunktion zur Zeitverschiebung 0 (nach Normierung mit den Energien der zwei beteiligten Signale) den Kreuzkorrelationskoeffizienten ρ_{sg} , d. h. ein normiertes Maß für die Ähnlichkeit der beiden Signale $s(t)$ und $g(t)$ bei einer Zeitverschie-

bung von 0:

$$\rho_{sg}^E = \frac{\varphi_{sg}^E(0)}{\sqrt{\varphi_{ss}^E(0) \cdot \varphi_{gg}^E(0)}} \leq 1 \quad (1.23)$$

Die Tatsache, daß der normierte Kreuzkorrelationskoeffizient immer ≤ 1 ist, folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, die auch als Ungleichheit zwischen dem Skalar-Produkt zweier Vektoren und dem Produkt der Beträge der Vektoren bekannt ist, sofern die Funktionen $s(t)$ und $g(t)$ als Vektoren im Hilbert-Raum aufgefaßt werden können:

$$(\varphi_{sg}^E(t))^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)g(t+\tau)d\tau \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} s^2(\tau)d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\tau)d\tau = \varphi_{ss}^E(0)\varphi_{gg}^E(0) \quad (1.24)$$

Für den Spezialfall, daß man $g(t) = s(t)$ setzt, folgt zudem, daß

$$\begin{aligned} (\varphi_{ss}^E(t))^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)s(t+\tau)d\tau \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} s^2(\tau)d\tau \right)^2 = \varphi_{ss}^E(0) \cdot \varphi_{ss}^E(0) \\ \varphi_{ss}^E(0) &\geq \varphi_{ss}^E(t') \end{aligned} \quad (1.25)$$

ist. Die Autokorrelationsfunktion ist also maximal für die Zeitverschiebung 0, bei der die Funktion mit sich selbst multipliziert und aufintegriert wird. Zu jedem anderen Zeitverzögerungswert kann das Integral höchstens genauso groß wie für die 0 werden. Das Gleichheitszeichen tritt dabei insbesondere für periodische Funktionen auf, bei denen eine Verschiebung um die Periode wieder zu einem identischen Resultat führt.

Während bis jetzt nur Energiesignale behandelt wurden, lassen sich die meisten der o. a. Eigenschaften mit entsprechender kleiner Modifikation der Definitionen für Leistungssignale anwenden, d. h. Signale für die gilt:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt < \infty \quad (1.26)$$

Wenn man von einem derartigen Leistungssignal, das in der Praxis häufiger vorkommt als ein reines Energiesignal, einen zeitlich begrenzten Aus-

schnitt $x_T(t)$ nimmt, läßt sich das Spektrum dieses Energiesignals berechnen zu:

$$x_T(t) = s(t) \cdot \text{rect}_T(t)$$

$$\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array}$$

$$X_T(f) = \mathfrak{F}(x_T(t)) \quad (1.27)$$

Zu dem Leistungsspektrum (d. h. dem Spektrum des Leistungssignals) kann man nun durch Grenzwertbildung für immer längere Signalauschnitte gelangen, bei denen die Frequenzauflösung des Spektrums immer kleiner wird. Dabei ist ein doppelter Grenzwertübergang notwendig, weil für jede endliche Zeit T das resultierende Spektrum $X_T(f)$ nur eine mit der Spalt-Funktion verschmierte Version des „eigentlichen“ Spektrum des Leistungssignals darstellt:

$$S_P^2(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{f - \frac{\Delta f}{2}}^{f + \frac{\Delta f}{2}} |X_T(f)|^2 df \quad (1.28)$$

Das Leistungsspektrum kann daher auch als zeitlicher Mittelwert der Ausgangsleistung eines (unendlich) scharfen Bandpaßfilters bei der Frequenz f interpretiert werden. Durch den ersten Grenzwertübergang ($T \rightarrow \infty$) wird aus der Energie- eine Leistungsmessung am Ausgang des Bandpaßfilters und durch den zweiten Grenzübergang ($\Delta f \rightarrow 0$) wird dieses Bandpaßfilter beliebig scharf auf die Frequenz abgestimmt, wobei der potentielle Leistungs-Verlust durch Division mit Δf kompensiert wird.

Die Autokorrelationsfunktion φ_{ss}^P eines Leistungssignals kann nun ebenfalls als Grenzwert eines zeitlich begrenzten Ausschnitts des Signals angesehen werden:

$$\varphi_{ss}^P(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau) s(\tau + t) d\tau \quad (1.29)$$

Für diese Autokorrelationsfunktion gilt ebenfalls das **Wiener-Kchintchine-Theorem**, obwohl diese Gleichheit nicht so unmittelbar aus den Definitio-

nen der Fouriertransformation folgt wie für Energiesignale:

$$\varphi_{ss}^p(t) \longleftrightarrow S_p^2(f) \quad (I.30)$$

Die auf den Auto- bzw. Kreuzkorrelationsfunktionen aufbauenden Anwendungen haben in der Praxis zumeist eine Verminderung eines externen Rauschens als Ziel. Dabei nutzt man aus, daß das Nutzsignal mit einem Referenzsignal korreliert ist, während ein externes, statistisches Rauschen nicht korreliert ist, so daß die Korrelationsfunktion verschwindet. In der Optik oder der Radartechnik wird durch Kreuzkorrelation ein sogenanntes „**angepaßtes**“ (**Matched**) **Filter** erzeugt, das als Impulsantwort gerade die Zeitumkehr des gesuchten Signals hat. Nehmen wir also an, daß ein Radar-Sender das Signal $s(t)$ aussendet und daß als empfangenes Signal das Signal $y(t)$ auftritt, wobei gilt:

$$y(t) = \alpha \cdot s(t-\tau) + x(t) \quad (I.31)$$

α : Gesuchter Reflexionsfaktor (z. B. Rückstreuoeffizient)

τ : Gesuchte Verzögerungszeit (Laufzeit des ausgesandten Signals)

$x(t)$: Unbekanntes Störsignal, z. B. Rauschen, das mit $s(t)$ unkorreliert ist.

Wird in der Korrelationsanalyse nun die Kreuzkorrelationsfunktion gebildet, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_{ys}(t) &= [\alpha \cdot s(t) * s(-t + \tau) + s(t) * x(-t)] = \alpha \cdot \varphi_{ss}(t - \tau) + 0(t) \\ &= \alpha \cdot \varphi_{ss}(0) \quad \text{für } t = \tau \end{aligned} \quad (I.32)$$

d.h. der störende Term wird durch die Kreuzkorrelation eliminiert ($0(t)$ geht gegen 0) und die Kreuzkorrelation wird maximal, wenn die Verzögerungszeit t gerade der gesuchten Verzögerung τ entspricht. Für diese Verzögerung läßt sich auch der Koeffizient α erzeugen. Die Kreuzkorrelationsfunktion läßt sich durch einen Filter mit der Impulsantwort $h(t) = s(-t)$ erzeugen, das damit ein angepaßtes („Matched“ Filter) darstellt. Die für die Radartechnik am besten geeigneten Signale haben eine δ -förmige Autokorrelationsfunktion und eine maximale Aussteuerung zu jedem Zeitpunkt. Daher eignen sich die noch zu besprechenden Pseudo-Zufallssignale (Maximalfolgen) oder Chirp-Signale mit ansteigender oder abfallender Momentanfrequenz.

I.4 Laplace-Transformation

Bisher wurde nur die Fourier-Transformation betrachtet, bei der ein Zeitsignal als Summe (bzw. im kontinuierlichen Fall als Integral) von harmonischen Funktionen der Form $e^{i2\pi ft}$ dargestellt wurde. Dabei gibt es für einige Funktionen Konvergenzprobleme, d.h. die Fouriertransformierte existiert nicht bzw. existiert nur im Grenzwert. Um für eine wesentlich größere Klasse von Funktionen die Existenz einer Transformierten garantieren zu können und um andererseits auch zu einer besseren Handhabbarkeit der Transformierten (z. B. für die Lösung von linearen Differentialgleichungen) zu gelangen, wird die Laplace-Transformation eingeführt. Bei ihr wird eine Zeitfunktion in eine Summe (bzw. Integral) von exponentiell ansteigenden bzw. abfallenden Funktionen der Form $e^{(\sigma+2\pi i \cdot f)t}$ zerlegt.

Gemäß der oben besprochenen Definition ist die Fouriertransformierte definiert als:

$$\mathfrak{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi i f t} dt, \quad \mathfrak{F}^{-1}(S(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{+2\pi i f t} df \quad (I.33)$$

Für die Laplace-Transformation führen wir jetzt die verallgemeinerte Frequenz-Variable p ein, bei der die bisher in der Fouriertransformation benutzte Frequenz f den Imaginärteil darstellt und der Realteil den Exponent σ der exponentiell ansteigenden bzw. abfallenden Funktion bildet. Die Laplace-Transformierte ist damit die Verallgemeinerung der Fouriertransformation, bzw. die analytische Fortsetzung der bisher nur auf der Frequenz-Achse definierten Fourier-Transformierten auf die gesamte komplexe p -Ebene. Eine weitere Voraussetzung ist, daß $s(t)$ kausal ist, d. h. $s(t) = 0$ für $t < 0$. Diese Einschränkung bedeutet, daß der Zeit-Nullpunkt so gewählt werden muß, daß das zu analysierende Signal nur für positive Zeiten einen signifikanten Anteil aufweisen darf. Dies ist notwendig, weil beispielsweise bei exponentiell mit der Zeit abklingenden Funktionen es Konvergenzprobleme geben würde, wenn beliebig große negative Zeiten zugelassen wären. Unter diesen Voraussetzungen ist die Laplace-Transformierte dann definiert als:

$$\mathcal{L}(s(t)) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt = S(p)$$

$$s(t) = \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} S(p)e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Wenn die Laplace-Transformierte und ihre Rücktransformation existiert, wird $s(t)$ durch die Laplace-Transformation in eine Summe (bzw. Integral) von Funktionen der Form $S(p) \cdot e^{(\sigma+2\pi i f)t}$ zerlegt. Die Laplace-Transformierte existiert auch für viele Funktionen, für die die Fouriertransformation nicht existiert. Im allgemeinen kann für die Existenz der Laplace-Transformierten ein Konvergenzgebiet angegeben werden, d.h. ein Bereich von p , für den der Realteil σ von p größer als ein bestimmter Minimalwert σ_0 ist. Damit ergibt sich für die komplexe p -Ebene folgende anschauliche Interpretation:

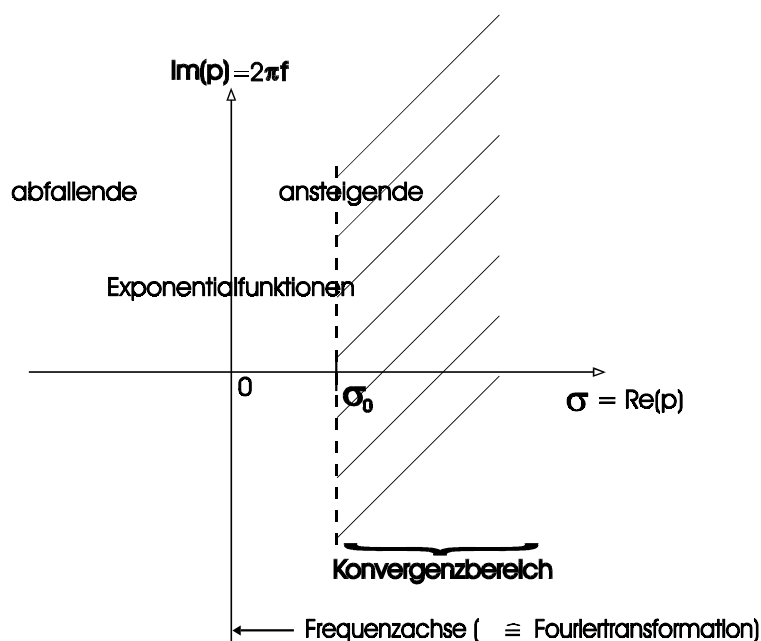


Abb.1.5: Komplexe p -Ebene mit Konvergenzbereich rechts von σ_0

In der komplexen p -Ebene entspricht die Imaginärteilachse der aus der Fourier-Transformation bekannten Frequenzachse. Die auf dieser Achse möglicherweise existente Fourier-Transformierte wird auf die gesamte Ebene analytisch fortgesetzt (vgl. entsprechenden Formalismus aus der Funktionentheorie). Für negative $\text{Re}(p)$ (linke Halbebene) werden abfallende Exponentialfunktionen, für die rechte Halbebene ($\text{Re}(p) > 0$) werden ansteigende Exponentialfunktionen dargestellt, die entsprechend des Betrags von $S(p)$ zu der Zeitfunktion $s(t)$ beitragen. Das rechts von einem bestimmten Minimalwert σ_0 liegende Konvergenz-Gebiet für die Laplace-

Transformierte kann die Imaginärteil-Achse mit einbeziehen. In diesem Fall existiert auch die Fourier-Transformierte. Falls $\sigma_0 > 0$ ist, existiert zwar die Laplace-Transformierte, nicht jedoch die Fourier-Transformierte. Oft kann jedoch die Fourier-Transformierte als Grenzwert der Laplace-Transformierte für $\sigma_0 \rightarrow 0$ aufgefaßt werden.

Die Rechenregeln der Laplace-Transformierten ähneln derjenigen der Fouriertransformation und sind in Tabelle 1.3 aufgeführt.

Besonders hervorzuheben ist die Differentiationsregel, bei der die n-fache Differentiation der Zeitfunktion in eine Multiplikation der Laplace-Transformierten mit p^n führt:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n} s(t)\right) = p^n \mathcal{L}(s(t)) - s(0^+)p^{n-1} - s'(0^+)p^{n-2} \dots - s^{(n-1)}(0^+) \quad (1.35)$$

Die rechten Terme stellen die Anfangsbedingungen für $t = 0$ dar, die aus formalen Gründen nicht vernachlässigt werden dürfen. Für alle „ordentlichen“, physikalisch sinnvollen Zeitfunktionen $s(t)$ kann der Anfangszeitpunkt jedoch so gewählt werden, daß sämtliche dieser Terme identisch 0 sind.

Einige Beispiele von Laplace-Transformierten sind ebenfalls in Tabelle 1.3 angegeben. Besonders hervorzuheben ist die Laplace-Transformierte der **Stufen-Funktion**, die für $t < 0$ verschwindet und für $t \geq 0$ den Wert 1 annimmt:

$$\mathcal{L}(\text{step}(t)) = \frac{1}{p} \quad \text{für } \sigma > 0 \quad (1.36)$$

(d.h. $\sigma_0 = 0$)

$$\mathcal{L}(e^{p_0 t} \cdot \text{step}(t)) = \frac{1}{p - p_0} \quad \text{für } \sigma - \text{Re}(p_0) > 0 \quad (1.37)$$

(d.h. $\sigma_0 = \text{Re}(p_0)$).

Tabelle 1.3: Eigenschaften und Rechenregeln der Laplace-Transformation

a) **Definiton:**

$$S(p) = \int_0^{\infty} s(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}(s(t)) \quad s(t) = \begin{cases} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} S(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

b) **Linearität:** $\mathcal{L}(\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)) = \alpha \cdot \mathcal{L}(s_1(t)) + \beta \cdot \mathcal{L}(s_2(t))$ c) **Differentiation:**

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n} s(t)\right) = p^n \mathcal{L}(s(t)) - s(0^+) p^{n-1} - s'(0^+) p^{n-2} \dots - s^{(n-1)}(0^+)$$

$$= p^n \mathcal{L}(s(t)), \text{ falls } s^{(k)}(0) = 0, k = 0, \dots, n-1$$

d) **Integration:** $\mathcal{L}\left(\int_0^t s(t') dt'\right) = \frac{S(p)}{p}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\int_p^{\infty} S(p') dp'\right) = \frac{s(t)}{t}$ e) **Verschiebung:** $\mathcal{L}(s(t - t_0)) = e^{-pt_0} \mathcal{L}(s(t)); t_0 > 0$

$$\mathcal{L}^{-1}(S(p + p_0)) = e^{-p_0 t} \mathcal{L}^{-1}(S(p))$$

f) **Skalierung:** $\mathcal{L}(s(a \cdot t)) = \frac{1}{a} \cdot S\left(\frac{p}{a}\right), a > 0$

$$\mathcal{L}^{-1}(S(b \cdot p)) = \frac{1}{b} \cdot \mathcal{L}^{-1}(S(b \cdot p)), b > 0$$

g) **Faltung:** $\mathcal{L}(s_1(t) * s_2(t)) = \mathcal{L}\left(\int_0^{\infty} s_1(t') s_2(t - t') dt'\right) = \mathcal{L}(s_1(t)) \cdot \mathcal{L}(s_2(t))$

$$\mathcal{L}^{-1}(S_1(p) * S_2(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} S_1(p') S_2(p - p') \frac{dp'}{2\pi i}\right) = \mathcal{L}^{-1}(S_1(p)) \cdot \mathcal{L}^{-1}(S_2(p))$$

Beispiele:

$$\mathcal{L}(\text{step}(t)) = p^{-1}; \sigma > 0$$

$$\mathcal{L}(\text{step}(t - t_0)) = \frac{e^{-pt_0}}{p}; \sigma > 0, t_0 > 0$$

$$\mathcal{L}(e^{p_0 t} \cdot \text{step}(t - t_0)) = \frac{1}{p - p_0}; \sigma > \text{Re}(p_0)$$

$$\mathcal{L}(\cos \omega t \cdot \text{step}(t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t \cdot \text{step}(t)) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \sigma > 0$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt} \text{step}(t)\right) = \frac{p}{p} = 1$$

$$\mathcal{L}(t^n \cdot \text{step}(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}}; \sigma > 0, n \in \mathbb{N}_0$$

Aus dieser Laplace-Transformierten läßt sich auch die (generalisierte) Verschiebungsregel für die Laplace-Transformation demonstrieren: Wird eine Funktion mit der (konvergenz-verbessernden) Exponential-Funktion mit negativem Realteil von p_0 multipliziert, bedeutet dies eine Verschiebung der Laplace-Transformierten um den Wert $\text{Re}(p_0)$ nach links, so daß gegebenenfalls die Frequenz-Achse wieder in dem Konvergenzbereich enthalten ist. Wenn andererseits p_0 einen Imaginärteil aufweist, entspricht die Multiplikation mit $e^{p_0 t}$ der Modulation mit einer harmonischen Funktion der Frequenz $\text{Im}(p_0/2\pi)$ und die Laplace-Transformierte wird um den Betrag $\text{Im}(p_0/2\pi)$ nach oben verschoben. Eine Multiplikation mit der Exponentialfunktion im Zeitbereich entspricht daher einer Verschiebung im Laplace-Bereich. Dies kann (genau wie bei der Fourier-Transformation) auch als Faltung mit einer δ -Funktion aufgefaßt werden. Analog ergibt sich bei einer Multiplikation mit einem Sinus bzw. Cosinus, der jeweils als Summe von zwei e-Funktionen aufgefaßt werden kann, die folgende Laplace-Transformierte:

$$\mathcal{L}(\cos \omega_0 t \cdot \exp(p_0 t) \cdot \text{step}(t)) = \frac{p - p_0}{(p - p_0)^2 + \omega_0^2} \quad \text{für } \sigma - \text{Re}(p_0) > 0 \quad (1.38)$$

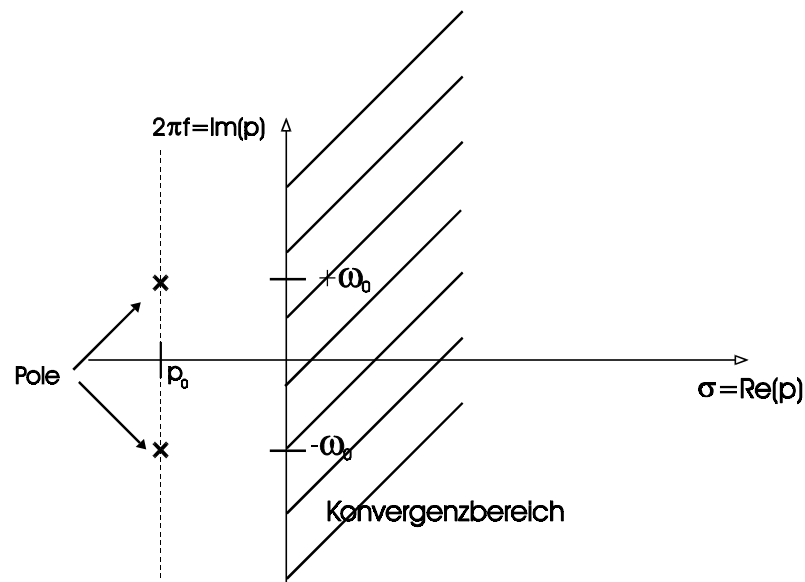


Abb.1.6: Komplexe p-Ebene mit Polen bei $(p_0, \pm\omega_0)$

Unter der Voraussetzung, daß p_0 im letzteren Fall reell ist, ergibt sich als Laplace-Transformierte ein gebrochen rationales Polynom in p , das zwei konjugiert komplexe Nullstellen des Zählers („Pole“) bei $p_0 \pm \omega_0$ aufweist. Die Pole der Laplace-Transformierten entsprechen daher den bei der Fourier-Transformation zur Darstellung des Cosinus notwendigen δ -

Funktionen bei $+\omega_0$ und $-\omega_0$. Für das obige Beispiel existiert eine Fourier-Transformierte, falls die Imaginärteil-Achse vom Konvergenzbereich eingeschlossen ist, d. h. falls $p_0 \leq 0$ ist. Die Lage der Pole auf der komplexen Ebene kann zudem einen ungefähren Überblick über die Eigenschaften der Laplace-Transformierten geben, die in den meisten Fällen nur entlang der Frequenz-Achse ausgewertet wird. Diese Eigenschaft ist insbesondere bei der Anwendung der Laplace-Transformation auf (analoge) Filter wichtig, die später beschrieben wird. Aufgrund der bereits erwähnten Differentiations-Regeln (und der dazu analogen Integrations-Regeln) eignet sich die Laplace-Transformation besonders gut zur Lösung von Differentialgleichungen, da eine Differentiation in eine Multiplikation „verwandelt“ wird. Eine wichtige Anwendung dieser Eigenschaft ist die Beschreibung analoger Filter, die schaltungstechnisch durch die Zusammenschaltung von elektrischen Bauelementen wie Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten aufgebaut werden können. Aus den für diese Bauelemente geltenden Differentialgleichungen kann eine Differentialgleichung für den Zusammenhang zwischen einem Eingangssignal $s(t)$ und dem Ausgangssignal $y(t)$ aufgestellt werden:

$$y(t) = \sum_{k=0}^M a_k \cdot \frac{d^k}{dt^k} s(t) + \sum_{k=1}^N b_k \cdot \frac{d^k}{dt^k} y(t) \quad (1.39)$$

Wird nun die Laplace-Transformation auf beide Seiten der Gleichung angewandt, so kann aufgrund der Linearität der Laplace-Transformation eine gliedweise Transformation der rechten Seite vorgenommen werden. Dabei werden die Koeffizienten a_k und b_k jeweils herausmultipliziert und die k -fache Differentiation wird in eine Multiplikation mit p^k umgewandelt. Für die Laplace-Transformierten $Y(p)$ des Ausgangssignals und $S(p)$ des Eingangssignals gilt dann:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \sum_{k=0}^M a_k \cdot p^k \cdot S(p) + \sum_{k=1}^N b_k p^k Y(p) \\ &= \frac{\sum_{k=0}^M a_k p^k}{1 - \sum_{k=1}^N b_k p^k} S(p) = H(p) \cdot S(p) \end{aligned} \quad (1.40)$$

$H(p)$ ist die Übertragungsfunktion des linearen Systems, die wir schon vorher als Fouriertransformierte der Impulsantwort kennengelernt hatten. In dem vorliegenden Fall läßt sich $H(p)$ jedoch sehr einfach und direkt aus

den Koeffizienten a_k und b_k der Differentialgleichung berechnen, so daß eine unmittelbare Korrespondenz zwischen den Elementen des Filters und der Übertragungsfunktion auftritt. Zu einer anschaulichen Interpretation dieser Übertragungsfunktion kommt man jedoch erst durch die sogenannte „**Pol-Nullstellen-Darstellung von H**“, bei der das Zähler- und Nennerpolynom jeweils in Linearfaktoren zerlegt wird. Diese Faktorisierung in Linearfaktoren ist aufgrund des Hauptsatzes der Algebra möglich, wenn in jedem Linearfaktor jeweils eine Nullstelle des Polynoms enthalten ist. Hier wird der allgemeine Fall behandelt, daß jede Nullstelle p_{0k} des Zählers bzw. p_{pk} des Nenners nur einfach auftaucht. Dann läßt sich die folgende Zerlegung angeben:

$$H(p) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k p^k}{1 - \sum_{k=1}^N b_k p^k} = \frac{a_M \prod_{k=1}^M (p - p_{0k})}{-b_N \prod_{k=1}^N (p - p_{pk})} \quad (1.41)$$

Die Nullstellen p_{0k} werden als **Nullstellen** von $H(p)$ bezeichnet, während die Nullstellen des Nenners p_{pk} die **Pole** von $H(p)$ sind. Wenn wir uns nur für den Betrag von $H(p)$ interessieren, so wird dieser als Produkt der Beträge dieser Linearfaktoren errechnet:

$$|H_{(p)}| = \left| \frac{a_M}{b_N} \right| \cdot \frac{\prod |p - p_{0k}|}{\prod |p - p_{pk}|} \quad (1.42)$$

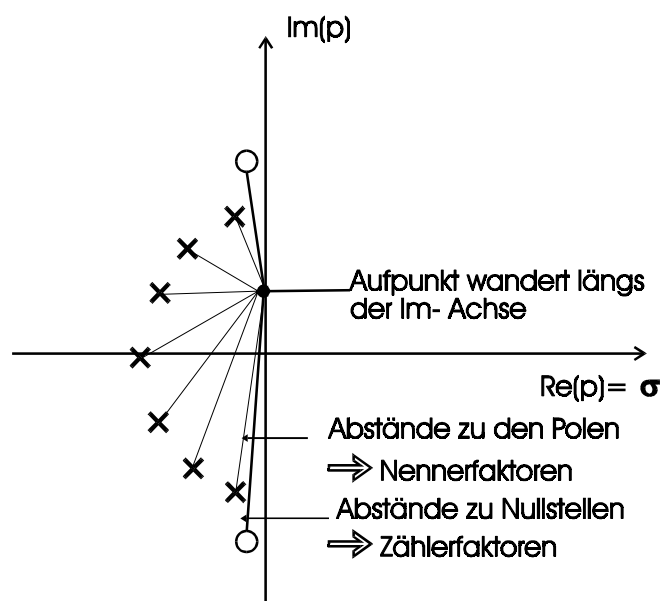


Abb. 1.7: Geometrische Interpretation der Pol-Nullstellendarstellung

Die geometrische Interpretation dieser Formel besagt, daß für das Berechnen des Betrags von H an einem bestimmten Punkt p sämtliche Abstände dieses Punktes p zu den Nullstellen von H miteinander multipliziert werden und durch sämtliche Abstände von p zu den Polen von H dividiert werden müssen. Wenn eine Übertragungsfunktion $H(p)$ z. B. die in obiger Skizze angegebene Verteilung von Polen und Nullstellen aufweist, muß für jeden möglichen Wert von p das Produkt aus diesen entsprechenden Verbindungslinien zu den Nullstellen durch das Produkt der Verbindungslinien zu den Polen dividiert werden. In der Regel wird $H(p)$ nur auf der positiven Imaginärteilachse ausgewertet, d. h. als Übertragungsfunktion im Sinne der Fouriertransformation. Dabei durchfährt p die Imaginärteilachse von $f=0$ bis $f=\infty$. Wird ein Frequenz-Wert in der Nähe einer Nullstelle angefahren, nimmt der Betrag der Übertragungsfunktion stark ab, während dieser Wert stark ansteigt, sobald der Aufpunkt in die Nähe eines Poles gerät. Aus der Verteilung der Pole und Nullstellen kann man daher grob das Übertragungsverhalten des Filters abschätzen. Im obigen Bild ergibt sich z. B. eine Tiefpaßcharakteristik, die bei niedrigen Frequenzen einen großen Wert aufweist (Anwesenheit mehrerer Pole), oberhalb einer gewissen Grenzfrequenz f_g jedoch nach ganz kleinen Werten geht.

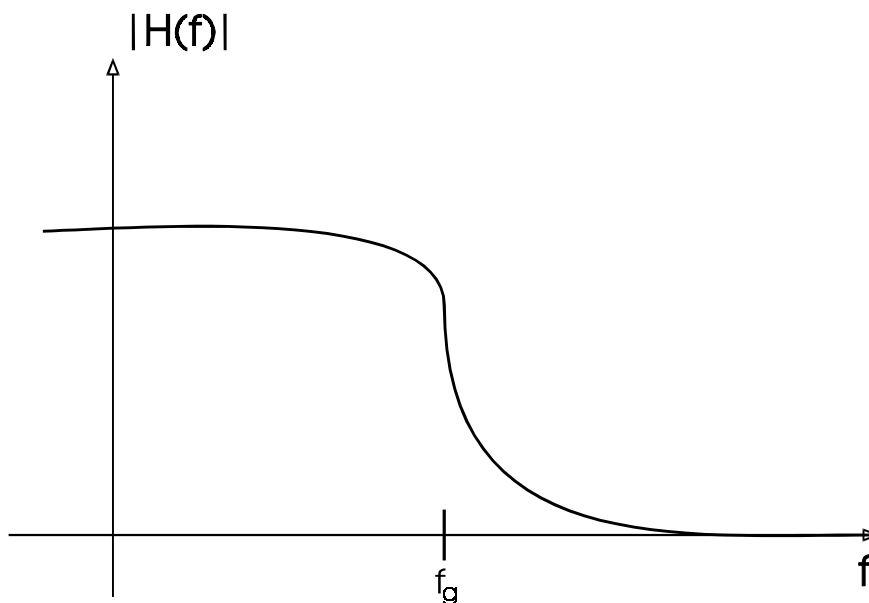


Abb.1.8: Übertragungsfunktion $H(f)$ für den Filter aus Abb.1.7

Diese Anordnung und geometrische Interpretation von Polen und Nullstellen kann auch ausgenutzt werden, um „optimale“ Filterfunktionen anhand der Lage von Polen bzw. Nullstellen vorzugeben, deren praktische Realisierung dann durch das Ausrechnen der zugehörigen Koeffizienten a_k und b_k erfolgen kann. Beispielsweise ist ein **Butterworth-Filter** n -ter Ordnung definiert durch

$$|H(p)|^2 = \left| \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{2\pi f_g}\right)^{2n}} \right| \quad (1.43)$$

Dabei treten $2n$ Pole auf einem Kreis mit dem Radius $2\pi f_g$ um den Ursprung auf. Die n Pole in der rechten Halbebene korrespondieren zu exponentiell ansteigenden Zeitfunktionen, d. h. zu nichtkausalen Impulsantworten des Filters. Sie können daher nicht für die gesuchte Übertragungsfunktion eingesetzt werden. Stattdessen werden die n Pole in der linken Halbebene, die auf einem Halbkreis angeordnet sind, für die Realisierung der (komplexen) Übertragungsfunktion $H(p)$ des Butterworth-Tiefpasses verwendet. Ein derartiger Tiefpaß hat den Vorteil eines streng monoton fallenden Frequenzgangs mit relativ hoher Flankensteilheit. Der Nachteil dieser Art von Tiefpaßfilter ist jedoch der relativ große Übergangsbereich, d. h. der große Frequenzabstand zwischen dem Durchlaßbereich (mit relativ großen Werten von $H(p)$) und dem Sperrbereich oberhalb von f_g . Einen kleineren Übergangsbereich und eine größere Steilheit kann mit sogenannten **Tschebycheff**-Filtern n -ter Ordnung erreicht werden, deren Filterfunktion die folgende Form aufweisen:

$$|H(p)|^2 = \left| \frac{1}{1 + V_n^2\left(\frac{p}{2\pi f_g}\right)} \right| \quad (1.44)$$

Dabei steht V_n für das Tschebycheff-Polynom n -ter Ordnung, das rekursiv definiert wird.

Die n Pole des Tschebycheff-Filters n -ter Ordnung liegen auf der in der linken Halbebene gelegenen Halbellipse um den Ursprung. Mit dieser Anordnung der n Pole tritt kein monoton fallender Frequenzgang wie im Butterworth-Filter auf, sondern im Passband unterhalb von f_g treten sogenannte „Ripple“ auf, bei denen die Übertragungsfunktion schwankt. Diese nachteilige Eigenschaft des Tschebycheff-Filters kann durch geschickte Wahl der Parameter auch teilweise in den Sperr-Bereich verlagert werden. Der Vorteil des Tschebycheff-Filters ist jedoch die größere Flankensteilheit als beim Butterworth-Filter.

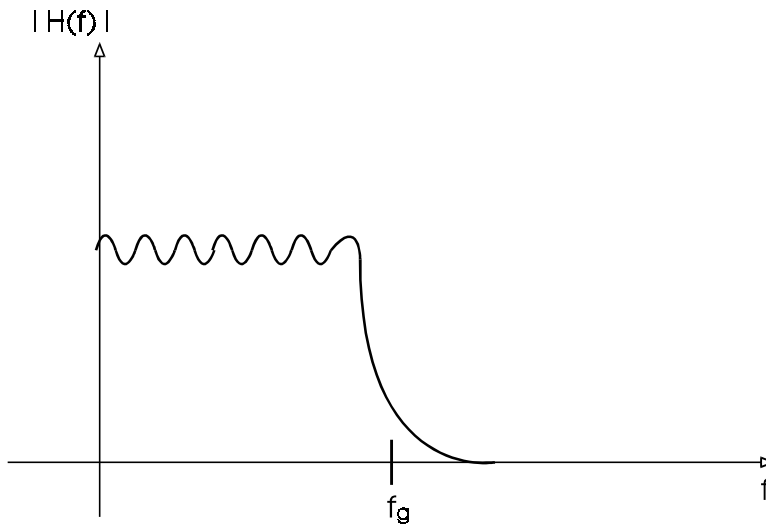


Abb. 1.9: Übertragungsfunktion $H(f)$ des Tschebycheff-Filters

Als dritte Variante von analogen Filtern sei das **Bessel-Filter** erwähnt, das wie folgt definiert ist:

$$|H(p)|^2 = \left| \frac{1}{B_{2n}\left(\frac{p}{2\pi f_g}\right)} \right| \quad (1.45)$$

Dabei bezeichnet $B_{2n}(p)$ eine Bessel-Funktion 2·n-ter Ordnung. Der Vorteil dieses Filters ist die große Phasenlinearität im Durchlaßbereich, d. h. die Phase der Übertragungsfunktion steigt linear mit zunehmender Frequenz für Frequenzen unterhalb von f_g an. Eine derartige lineare Phase entspricht einer konstanten Gruppenlaufzeit, d. h. für den Großteil der beobachteten Frequenzen wird dieselbe „Passierzeit“ (Gruppenlaufzeit) des Filters auftreten, so daß ein am Eingang des Filters anliegender Puls nicht aufgrund unterschiedlicher Laufzeiten zu unterschiedlichen Zeiten für die jeweils unterschiedlichen Frequenzen am Ausgang des Filters wieder herauskommt. Ein phasenlineares Filter besitzt daher den Vorteil, an der Zeitfunktion des Eingangssignals möglichst wenig Veränderung hervorzurufen. Der Nachteil des Bessel-Filters ist jedoch seine relativ geringe Flankensteilheit, bzw. sein relativ großer Übergangsbereich um f_g herum.

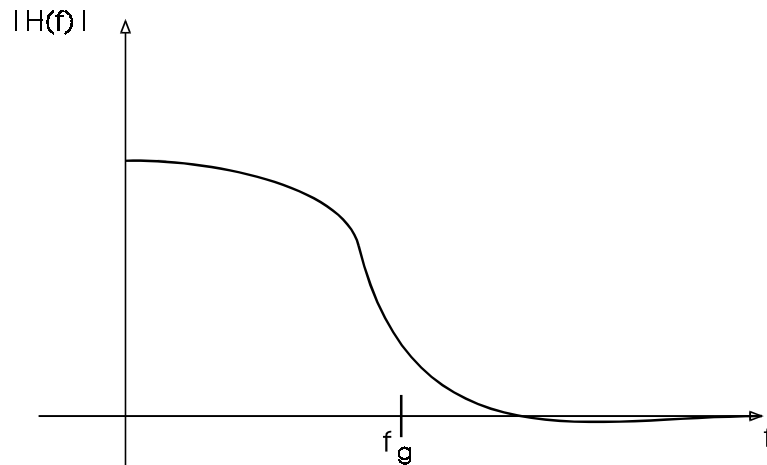


Abb.1.10: Übertragungsfunktion des Bessel-Filters

Welche dieser drei hier aufgeführten Prototyp-Filter jeweils besser geeignet ist, hängt von der jeweiligen Anwendung ab. Für manche Anwendungen ist beispielsweise eine möglichst unverfälschte Übertragung des Eingangssignals wichtiger als eine sehr hohe Abschwächung von Frequenzen dicht oberhalb der Grenzfrequenz f_g , so daß hier nur ein Bessel-Filter in Frage kommt. In anderen Anwendungen mag die geringe Verzerrung des Zeitsignals eine weniger wichtige Rolle spielen als eine möglichst starke und schon bei Frequenzen kurz oberhalb der Grenzfrequenz auftretende Dämpfung, so daß ein Tschebycheff-Filter am ehesten in Frage kommt.

I. 5 Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktionen

Bisher sind wir bei der Signalanalyse davon ausgegangen, daß eine Spektralanalyse für das gesamte Zeitsignal erfolgt, d. h. es wurde angenommen, daß das Signal dieselben spektralen Eigenschaften zu jedem Zeitpunkt aufweist. In der Praxis treten jedoch zumeist **nichtstationäre Signale** auf, deren Eigenschaften (z. B. spektrale Zusammensetzung, Struktur des Zeitsignals) stark zeitabhängig sind. Beispiele dafür sind Wetterdaten, geophysikalische Signale, oder Sprache. Für derartige Signale ist es wünschenswert, für jeden Zeitpunkt die jeweilige spektrale Leistungsdichte angeben zu können, d. h. man möchte eine Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktion $P(t,f)$ haben, die für jeden Zeitpunkt t und jede Frequenz f einen Wert angibt, der sich als die Energie (bzw. Leistung) des Signals zu diesem Zeitpunkt bei dieser Frequenz interpretieren läßt. Ein Beispiel für eine derartige Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktion bildet die in der Musik übliche Notenschrift, bei der zu jedem (Takt)-Zeitpunkt die Tonhöhe des zu spielenden Tons und seine Dauer angegeben wird. In der Physik sucht man jedoch nach einer allgemeineren Form dieser Zeit-

Frequenz-Verteilungsfunktion $P(t,f)$.

Die erste Lösung dieses Problems ist die **Kurzzeitspektralanalyse**, die auch als **Spektrogramm** $SG_w(t,f)$ bezeichnet wird:

$$SG_w(t,f) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} w(t-\tau)s(\tau) \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \right|^2 \quad (1.46)$$

$w(t)$ bezeichnet dabei eine Fensterfunktion. Beim Spektrogramm wird also ein um den Zeitpunkt t zentriertes Zeitfenster $w(t-\tau)$ benutzt, um einen Signalabschnitt „herauszuschneiden“, indem das unendliche lange Signal mit diesem Zeitfenster multipliziert wird. Dieser endliche Signalabschnitt wird dann fouriertransformiert, um das Energiespektrum zu berechnen. Zu jedem Analyse-Zeitpunkt t kann dann die Energie dieses Kurzzeitspektrums als Schwärzung in der Zeit-Frequenz-Ebene dargestellt werden, bei der die Zeit auf der Abszisse und die Frequenz auf der Ordinate aufgetragen wird (Spektrogramm).

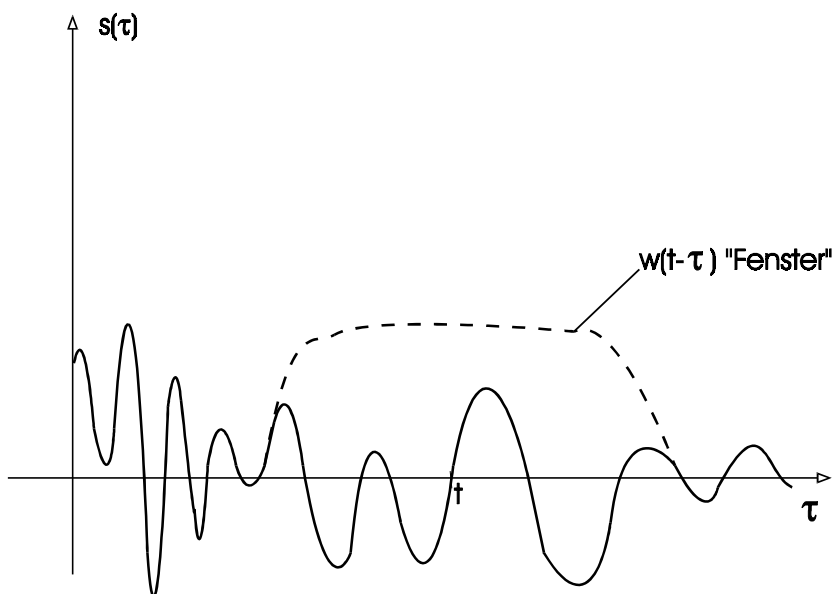


Abb.1.11: Gefensteretes Signal $s(\tau)$

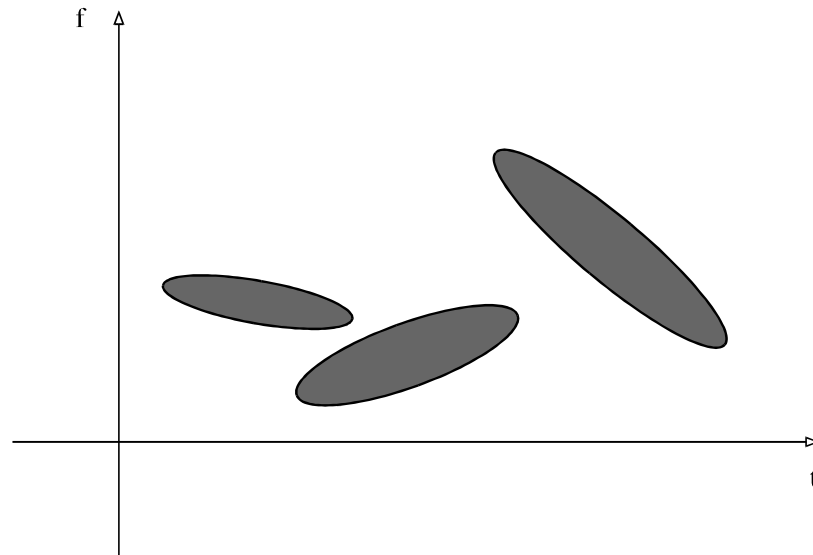


Abb.1.12: Spektrogramm als Schwärzung auf der t-f-Ebene

Diese Spektrogramm-Analyse stellt das Standard-Verfahren für viele Fragestellungen, z. B. in der Analyse von Sprach-Signalen und akustischen Signalen dar. Ein entscheidender Nachteil des Spektrogramms liegt in der Natur des Zeitfensters w begründet: Durch die Multiplikation des ursprünglichen Signals $s(t)$ mit dem Fenster im Zeitbereich wird eine Faltung des „eigentlichen“ Spektrums mit dem Spektrum des Fensters durchgeführt, so daß das resultierende Kurzzeitspektrum eine verschmierte Version des eigentlich zu schätzenden Spektrums von $s(t)$ ist. Wenn diese Verschmierung im Frequenzbereich dadurch verringert wird, daß das Zeitfenster w im Zeitbereich ausgedehnt wird, nimmt die Frequenzauflösung zwar zu, die Kurzzeit-Spektralanalyse bezieht sich dann jedoch auf einen längeren Zeitraum, so daß die Zeitauflösung abnimmt. Umgekehrt nimmt die Frequenzauflösung ab, sobald das Zeitfenster w verkleinert wird, weil zwangsläufig die Fouriertransformierte des kleineren Zeitfensters zu einer stärkeren Verschmierung im Spektralbereich führt. Man muß sich daher bei der Kurzzeit-Spektralanalyse für die Wahl eines speziellen, an die Gegebenheiten des zu analysierenden Signals angepaßten Zeitfensters $w(t)$ entscheiden. Je nach Größe dieses Fensters handelt es sich dabei um eine Schmalband- oder Breitband-Analyse.

Es stellt sich nun die Frage, ob man das Problem der Unschärfe entweder im Frequenz- oder im Zeitbereich durch geeignete Wahl einer anderen Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktion $P(t,f)$ umgehen kann. Eine derartige Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktion sollte idealerweise sämtliche der folgenden Bedingungen erfüllen:

a) Nicht-Negativität, d. h.

$$P(t,f) \geq 0 \quad \forall t,f \quad (1.47)$$

b) Marginalverteilungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t,f) df = |S(t)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t,f) dt = |S(f)|^2 \quad (1.48)$$

c) Bilinearität

$$\alpha s_1(t) + \beta s_2(t) \rightarrow |\alpha|^2 P_{s_1}(t,f) + |\beta|^2 P_{s_2}(t,f) + \alpha\beta^* P_{s_1 s_2^*}(t,f) + \alpha^* \beta P_{s_2 s_1}(t,f) \quad (1.49)$$

d) Verschiebung

$$e^{-2\pi i f_0 t} s(t+a) \rightarrow P(t+a, f+f_0) \quad (1.50)$$

Für das Spektrogramm ist die Forderung a) aufgrund der Definition und der Interpretation als Energie-Wert erfüllt. Die Forderung b) ist nicht erfüllt, da beispielsweise die Zeit-Frequenz-Verteilung eines δ -förmigen Pulses eine wesentlich größere zeitliche Ausdehnung als das ursprüngliche Zeitsignal hat und die entsprechende Verteilungsfunktion eines (unendlichen langen) Sinus-Signals eine Verschmierung im Frequenzbereich aufgrund der Faltung mit der Fouriertransformierten des Fensters aufweist. Die Forderung c) ist erfüllt, wenn anstelle des Spektrogramms das Kreuz-Spektrum der gefensterten Versionen von $s_1(t)$ und $s_2(t)$ eingesetzt werden. Die Forderung d) wird ebenfalls vom Spektrogramm aufgrund der Fourier-Transformations-Eigenschaften erfüllt.

Leider ist die gleichzeitige Erfüllung der Forderung a) bis d) mit einer einzigen Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktion unmöglich. Wigner(1971) hat gezeigt, daß für Verteilungsfunktionen, die die Eigenschaften c) und d) aufweisen, entweder nur die Eigenschaft a) oder die Eigenschaft b) erfüllt sein kann, d. h. diese beiden Eigenschaften schließen sich gegenseitig aus. Der „Prototyp“ für eine Verteilungsfunktion, die im Gegensatz zum Spektrogramm die Eigenschaft b) erfüllt (aber nicht die Eigenschaft a)) ist

die **Wigner-Ville-Verteilungsfunktion** $WVD(t,f)$. Sie wurde 1932 von Wigner in die Quantenmechanik als Quantenverteilungsfunktion eingeführt und von Ville in den 60er Jahren unabhängig davon in die Signaltheorie. Sie ist definiert als:

$$WVD(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (1.51)$$

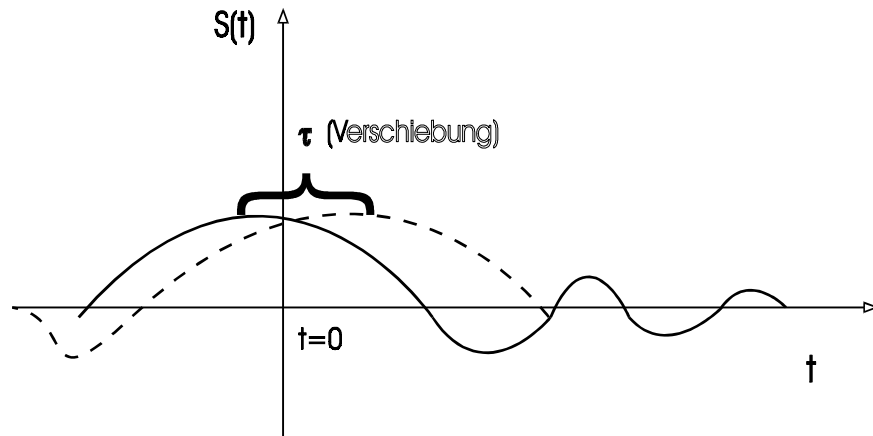


Abb.1.13: Veranschaulichung der Eigenschaften der Wigner-Ville-Verteilung

Zur Berechnung wird also das Signal zum Zeitpunkt t gespiegelt und für positive und negative Zeiten abgetastet. Dieses an eine Korrelation erinnernde Produkt (das aber nicht einer Korrelation entspricht!) wird dann mit der zeitlichen Verschiebungsvariable τ fouriertransformiert. Wenn anstelle von s^* unter dem Integral ein anderes Signal g^* eingesetzt wird, handelt es sich um die sogenannte **Kreuz-Wigner-Verteilung**. Da für die Verteilung die Marginal-Verteilungen (Anforderung b)) erfüllt sind, hat sie die angenehme Eigenschaft, überall dort im Mittel zu verschwinden, wo das Signal = 0 ist, um ebenfalls im Frequenz-Bereich im Mittel zu verschwinden, wo im Langzeit-Spektrum keine spektralen Energieanteile mehr auftreten. Der entscheidende Nachteil ist jedoch, daß die Wigner-Ville-Verteilung negativ werden kann und daher nicht als Energie-Verteilung interpretiert werden kann. Weitere Eigenschaften der Wigner-Ville-Verteilung sind in nachstehender Tabelle aufgeführt.

Eigenschaften der WVD:

$$a) W_{f,g}(t, W) = W_{F,G}(t, W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(W + \frac{\Omega}{2}\right) G^*\left(W - \frac{\Omega}{2}\right) e^{-i\Omega t} d\Omega$$

b) f reel $\Rightarrow W_{ff}$ reel

$$c) \int W_f(t, \omega) e^{i\omega t} d\omega = f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$d) W_{f^*h}(t, \omega) = \int W_f(\tau, \omega) W_h(t - \tau, \omega) d\tau \quad (1.52)$$

$$W_{f^*m}(t, \omega) = \int W_f(t, \Omega) W_m(t, \omega - \Omega) d\Omega$$

$$e) \left| \int s_1(t) s_2^*(t) dt \right|^2 = 2\pi \iint W_{s_1}(t, \omega) W_{s_2}(t, \omega) dt d\omega$$

f) Mittlere Frequenz = Momentanfrequenz (f sei dabei ein analytisches Signal)

$$\Omega_f(t) = \frac{1}{|f(t)|^2} \int \omega W_f(t, \omega) d\omega = \text{Im} \frac{d}{dt} (\ln(f(t))) \quad (1.53)$$

Die allgemeine Form der Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktionen, die die o. a. Bedingungen (teilweise) erfüllen, werden als Cohen-Klasse bezeichnet. Eine beliebige Verteilungsfunktion dieser Klasse entsteht dabei aus der Wigner-Ville-Verteilung durch Faltung mit einem Kern $\rho(t, f)$

$$P_s(t, f) = WVD_s(t, f) * \rho(t, f)$$

$$SG_w(t, f) = WVD_s(t, f) * WVD_w(t, f)$$

Dabei ist das „*“ als zweidimensionale Faltung sowohl über die Frequenz-Variable als über die Zeit-Variable zu verstehen. Das Spektrogramm ist ebenfalls ein Repräsentant der Cohen-Klasse und stellt sich als eine verschmierte Form der Wigner-Ville-Verteilung dar, die durch zweidimensionale Faltung mit der Wigner-Ville-Verteilung der Fensterfunktion $w(t)$ aus der Wigner-Ville-Verteilung des Signals erzeugt wird. Durch hinreichend große „Verschmierung“ der Wigner-Ville-Verteilung heben sich gerade die (u. U. negativen) Interferenzterme in der Wigner-Ville-Verteilung auf und es entsteht eine nicht negative, als Energiedichte interpretierbare, quadratische Form, wie beispielsweise in Form des Spektrogramms. Als Vergleich zwischen Spektrogramm und Wigner-Ville-Verteilung sind in den folgenden Beispielen beide Verteilungsfunktionen für einen Chirp (d. h. für ein Sinus-Signal mit linear mit der Zeit ansteigen-

der Momentanfrequenz), sowie für zwei Chirps angegeben (d. h. zwei Sinus-Signale jeweils mit linear ansteigender und abfallender Momentanfrequenz), sowie für ein Sinus-Signal mit der Frequenz f_1 , das nach einer Zeit t_1 abgeschaltet wird und zu einem späteren Zeitpunkt t_2 mit einer höheren Frequenz f_2 wieder angeschaltet wird und endliche Dauer hat. Bei der Wigner-Ville-Verteilung treten Interferenzterme auf, die sich im zeitlichen Mittel bzw. im Frequenz-Mittel genau aufheben, aber die Interpretation der Verteilungsfunktion als Energiedichte erschweren. Diese Interferenzterme entstehen einerseits im Frequenzbereich als (nichtlineare) Mischprodukte zwischen zwei „realen“ Frequenzkomponenten und andererseits im Zeitbereich als Interferenz-terme zwischen benachbarten Zeitbereichen.

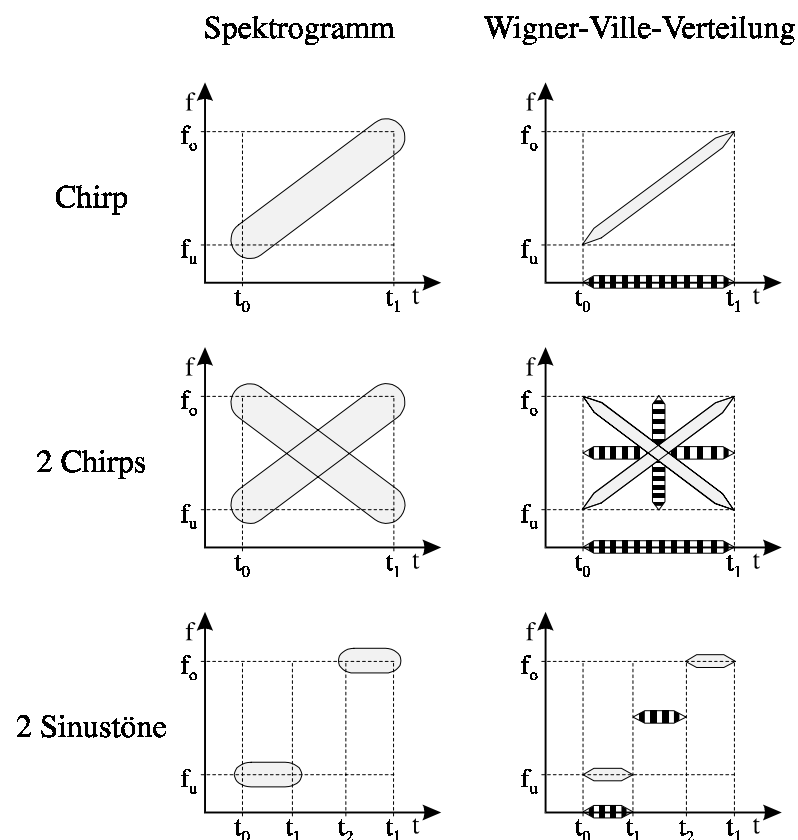




Abb.: 1.14: Beispiele für Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktionen (schematisch)

Da die Wigner-Ville-Verteilung auch eine Rolle als Quantenverteilungsfunktion in der Quantenmechanik (in letzter Zeit insbesondere beim Quantenchaos) spielt, sei auf die formale Analogie zwischen der Signaltheorie und der Quantenmechanik hingewiesen:

Signaltheorie	Quantenmechanik
Signal $s(t)$	Wellenfunktion $\Psi(q,t)$
	
$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(t) e^{-i\omega t} dt$	$\Phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Psi(q,t) e^{-ipq/\hbar} dq$
Leistungsspektrum:	Aufenthaltswahrscheinlichkeit:
$ S(\omega) ^2$	$ \Psi(q,t) ^2, \Phi(p,t) ^2$
Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktion:	Orts-Impuls- Wahrscheinlichkeitsdichte:
$P(t,\omega)$	$P(p,q)$

Dabei stellt sich die Frage, wie die aus der Quantenmechanik wohlbe- kannte Unschärferelation sich auf die Existenz und die Form der Zeit- Frequenz-Verteilungs-Funktion auswirkt. Die Unschärferelation ist eine direkte Folge der Fouriertransformationbeziehung zwischen dem Signal und seinem Energiespektrum in der Signaltheorie bzw. der Darstellung im Orts- und Impulsraum in der Quantenmechanik: Nimmt ein Zeitsignal den Zeitbereich T ein, so hat seine Fouriertransformierte die Bandbreite B und das Zeit-Bandbreiten-Produkt unterschreitet nie den Wert $1/2$ (diese Un- gleichung ist eine Gleichung für den Fall der Gauß -Funktion). Analoges gilt für die Ausdehnung einer Verteilungsfunktion im Orts- bzw. im Impuls- raum der Quantenmechanik. Weiterhin bewirkt die Fouriertransformati- onsbeziehung zwischen den Marginalverteilungen, daß die Zeit- Frequenzverteilungsfunktion $P(t,f)$ bzw. die Quantenverteilungsfunktion $P(p,q)$ Restriktionen unterliegen, die sich in der nicht gleichzeitigen Erfüll- barkeit der o. a. Bedingungen niederschlagen. Man kann dabei die fol- genden Fälle unterscheiden:

	WVD	Spektrogramm
erhalten	Marginalverteilungen	nicht erhalten
hoch	Auflösung	gering
gering	Interpretierbarkeit	hoch

Die Unschärferelation hat also primär nichts mit der Existenz der Vertei- lungsfunktion zu tun und sagt auch nichts über die gleichzeitige Messung von Zeitausdehnung und Bandbreite bzw. Ort und Impuls aus. Die Un- schärferelation sagt vielmehr, daß wenn an einem Repräsentanten eines Ensembles bei einer Ortsmessung und an einem anderen Repräsentan- ten desselben Ensembles einer ebenfalls erfolgenden Impulsmessung die

Unschärferelation zwangsläufig besteht zwischen diesen beiden Größen. Die nichtgleichzeitig Meßbarkeit dieser beiden Größen ist damit nicht direkt eine Folge der Unschärferelation, sondern folgt aus der quantenmechanischen Formulierung der Vertauschungsrelationen, die zugleich die Unschärferelation zur Folge hat: $\Delta\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{B} \geq \frac{1}{2} |[\mathbf{A}, \mathbf{B}]|$

Wenn die Observablen \mathbf{A} und \mathbf{B} nicht vertauschbar sind, können sie an demselben Zustand auch nicht ohne gegenseitige Störung gemessen werden und der Kommutator in der obigen Gleichung hat einen Betrag > 0 . Dieses führt dazu, daß die Observablen \mathbf{A} und \mathbf{B} als Fouriertransformations-Paare aufgefaßt werden können, für die die Unschärferelation $\Delta\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{B} \geq \frac{1}{2} \hbar$ gilt. Die Nicht-Vertauschbarkeit ist somit keine Folge der Unschärferelation sondern die Unschärferelation eine über die Marginalverteilungen gefolgerte Folge der Nicht-Vertauschbarkeit.

Abschließend sei auf die Dualismus zwischen der Interpretierbarkeit einer Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktion und der Auflösung dieser Zeit-Frequenz-Verteilungsfunktion hingewiesen: Entweder ist eine derartige Funktion nicht-negativ und gut interpretierbar (wie das Spektrogramm) oder sie kann negative Werte annehmen, ist damit nicht als Energiedichte interpretierbar, führt dagegen aber zu einer größeren gleichzeitigen Genauigkeit in der Zeit- und Frequenzauflösung wie die Wigner-Ville-Verteilung. Zur weitergehenden Lektüre sei der Artikel von Cohen (1976) und Mecklenbräuker und Claßen empfohlen.